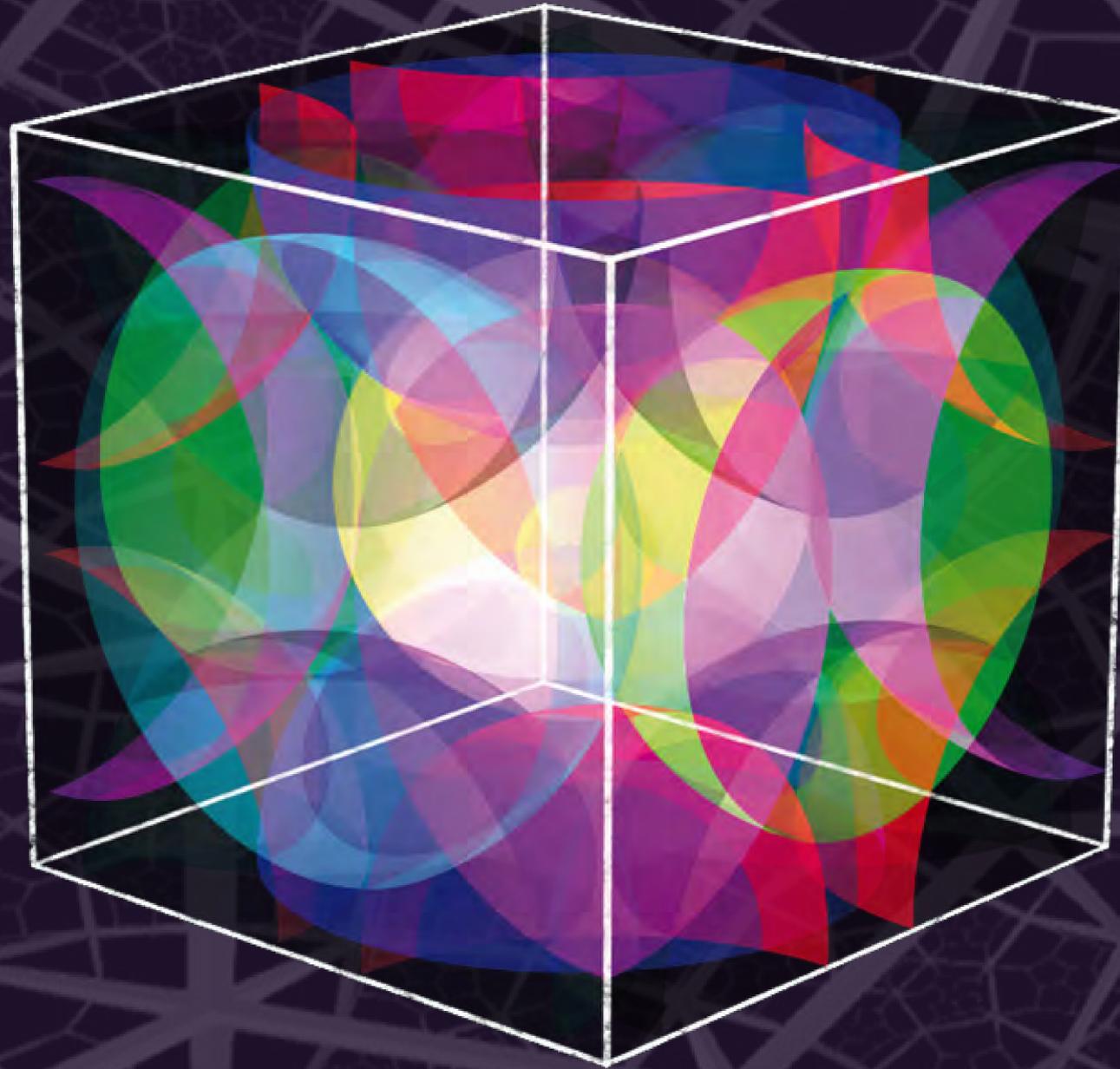


UM PROJETO EM PARCERIA BRASIL-FRANÇA



uma abordagem  
sensível ao  
universo da  
**Geometria**  
e da **Topologia**

UM OLHAR NOS ESPAÇOS DE

**DIMENSÃO**

**3**

o catálogo da exposição de P. Berger e P.-Y. Fave

# Prefácio

---

A natureza dos espaços tridimensionais constitui o tema da exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3” realizada pelos autores franceses Pierre Berger e Pierre-Yves Fave, com a participação dos cientistas e artistas brasileiros Luiz Velho, Alex Laier e Sergio Krakowski. Este catálogo, desenvolvido por Luiz Velho e Júlia Rabetti Giannella, reúne os conteúdos principais da exposição Franco-Brasileira. Para informações sobre a versão interativa do catálogo acesse <http://olhar3d.impa.br/catalogo/>.

A classificação das superfícies, que são espaços bidimensionais, é um problema clássico da Matemática e foi resolvido há mais de 100 anos. A solução é o teorema que diz que as superfícies fechadas orientáveis são equivalentes, em termos topológicos, à esfera ou ao  $n$ -toro. Dessa forma, temos três classes de espaços fundamentais: *esférico*, *plano* (toro de genus igual a 1) e *hiperbólico* (toro de genus maior que 1).

Em 2002, o matemático russo Grigori Perelman provou o Teorema de Geometrização de Thurston sobre a classificação dos espaços de dimensão 3 e, como consequência, resolveu a famosa Conjectura de Poincaré, um dos problemas do milênio que estava em aberto desde 1904.

Na exposição, assim como neste catálogo, revelamos de forma intuitiva esse resultado revolucionário da Matemática através de ilustrações, fotografias e imagens esquemáticas para que o leitor possa vislumbrar a beleza das ideias envolvidas. Assim, cada parte do catálogo representa um dos conceitos que fazem parte dessa teoria.

A filosofia da exposição consiste em descrever as noções matemáticas sem fórmulas e com um mínimo de textos. Com isso, privilegamos uma abordagem sensorial, por elementos audiovisuais, mostrando aspectos puramente geométricos.

# Exposição Olhar 3D

A realização da exposição é fruto da colaboração de um grupo multidisciplinar, formado por pesquisadores e artistas brasileiros e franceses de importantes instituições, como o Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS / França), o Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), o Museu de Astronomia e Ciências Afins (MAST) e a Universidade Federal Fluminense (UFF).

# Introdução

A exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3”, em cartaz desde 22 de janeiro de 2015, no MAST (Museu de Astronomia e Ciências Afins, Rio de Janeiro), se divide em cinco partes distintas, que incluem:

- uma introdução aos conceitos de Geometria e Topologia;
- instalação interativa sobre variedades de dimensão 2;
- instalação interativa sobre variedades de dimensão 3;
- uma apresentação de teoremas e citações relevantes sobre o assunto;
- uma seção de biografias sobre os matemáticos pioneiros em estudos relativos ao tema.

Para mais informações acesse o site da exposição em <http://olhar3d.impa.br>.

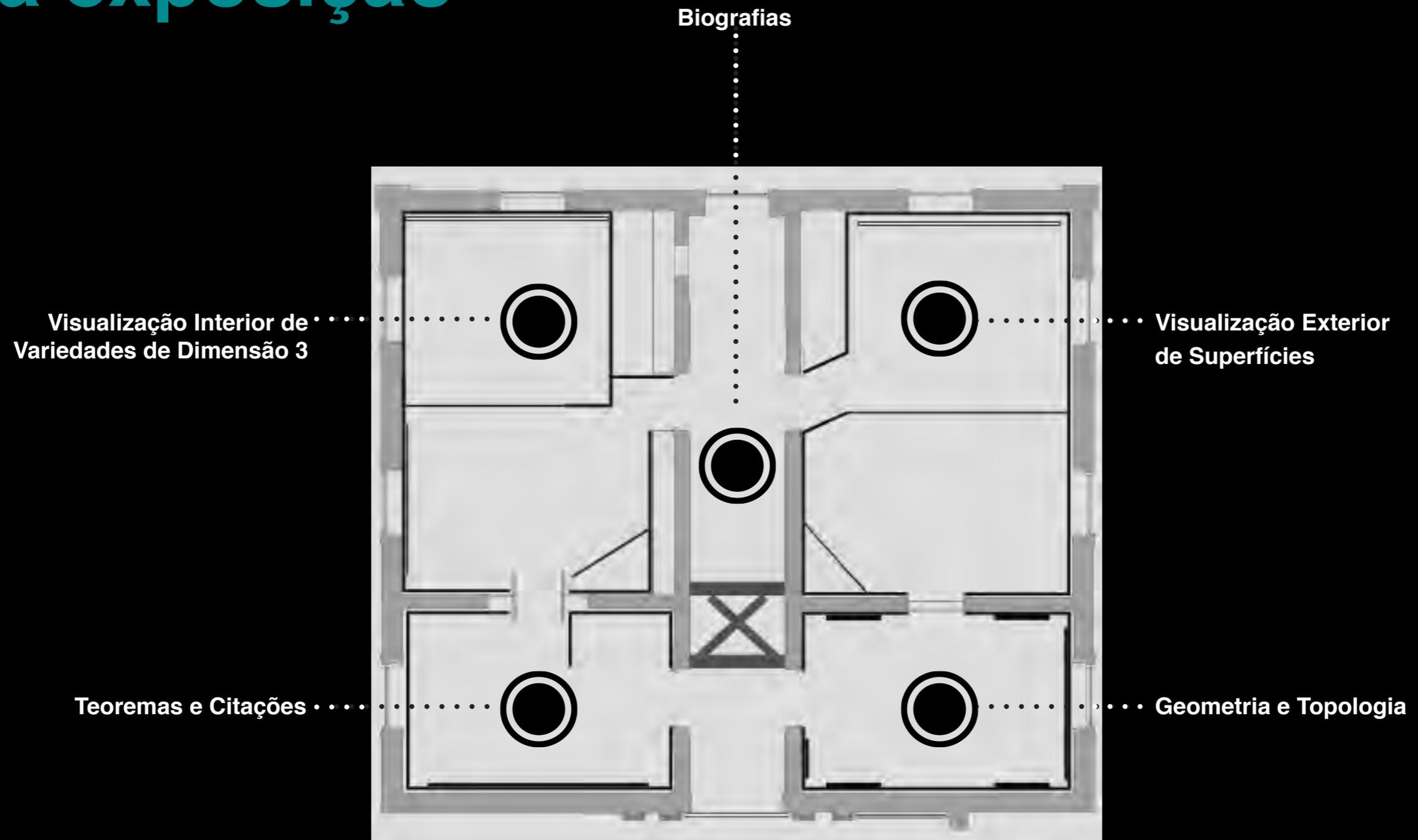


The screenshot shows the website for the exhibition "Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3". The header features a colorful 3D cube graphic, the title "Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3", the IMPA logo, and a "30 ANOS" anniversary badge. Below the header is a navigation menu with links: INICIAL, A EXPOSIÇÃO, VISITANTES, INTERAJA, SAIBA MAIS, DOWNLOADS, TOUR VIRTUAL, IMPRENSA, and CONTATO. The main content area displays a photograph of the exhibition entrance, which is a grand hall with white columns and a large archway. Below the photo, the section is titled "A EXPOSIÇÃO" and contains three paragraphs of text describing the exhibition's content, including references to the Poincaré conjecture and Thurston's geometrization theorem.



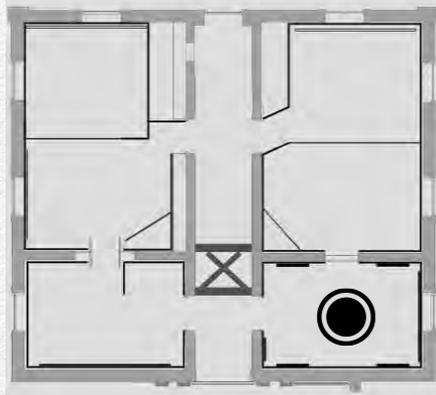
O MAST está localizado na Rua General Bruce, 586, no bairro de São Cristovão (Rio de Janeiro).

# Planta baixa da exposição



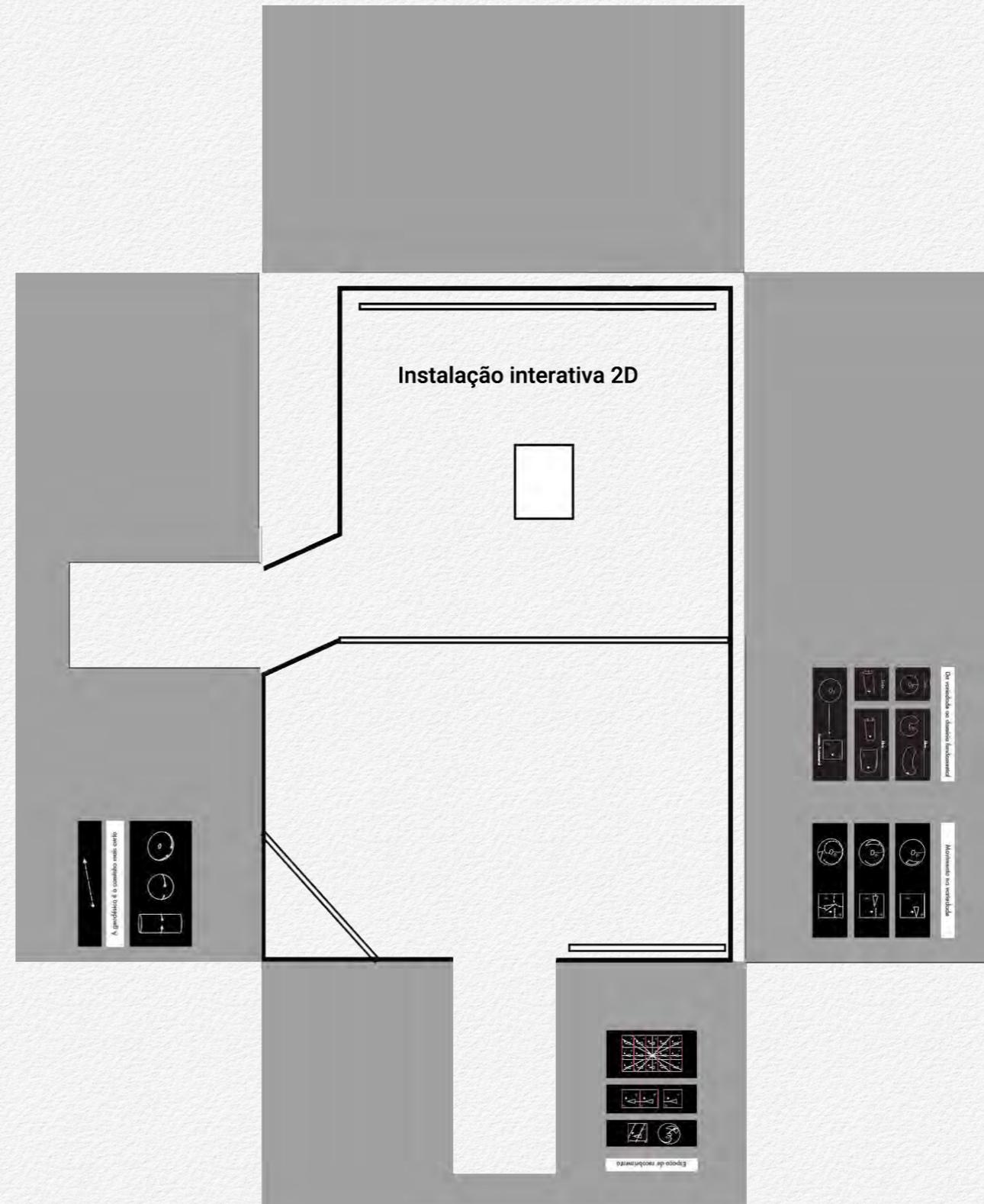
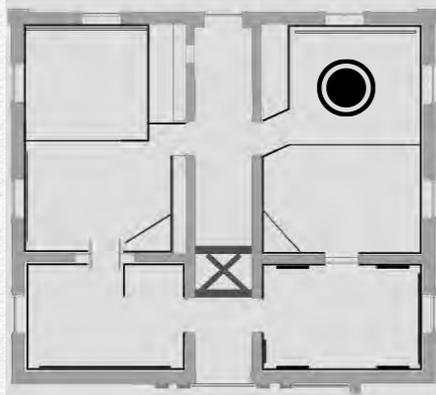
# Geometria e Topologia

Essa parte da exposição aborda conceitos básicos de dimensão, topologia e espaços não-euclidianos, além de investigar as variedades tridimensionais através de vídeos.



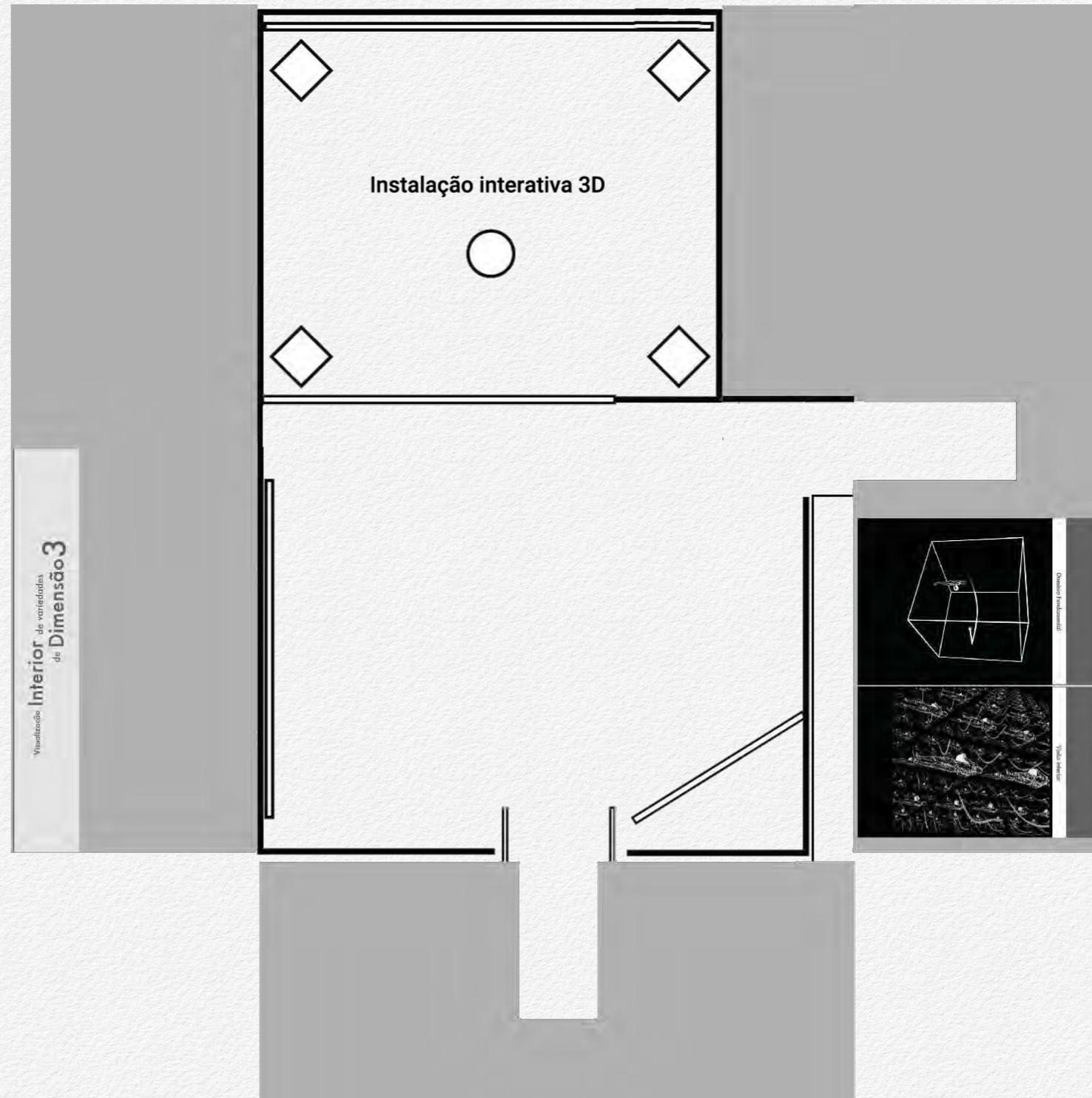
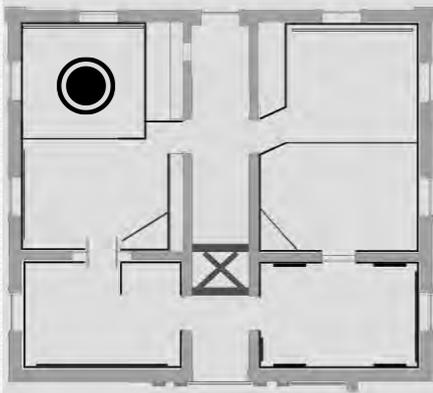
## Visualização Exterior de Superfícies

A segunda parte da exposição tem o objetivo de permitir uma investigação intuitiva das variedades de dimensão 2 através de ilustrações e de uma instalação para visualização interativa.



## Visualização Interior de Variedades de Dimensão 3

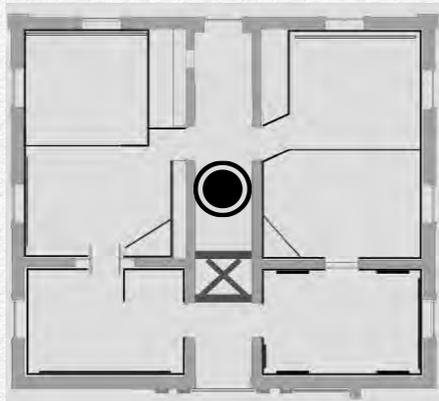
A terceira parte da exposição tem o objetivo de permitir uma investigação intuitiva das variedades de dimensão 3 através de ilustrações e de uma instalação para visualização interativa.





# Biografias

A exposição ainda oferece um histórico sobre os principais matemáticos, problemas e prêmios relacionados à Conjectura de Poincaré.



# Geometria e Topologia

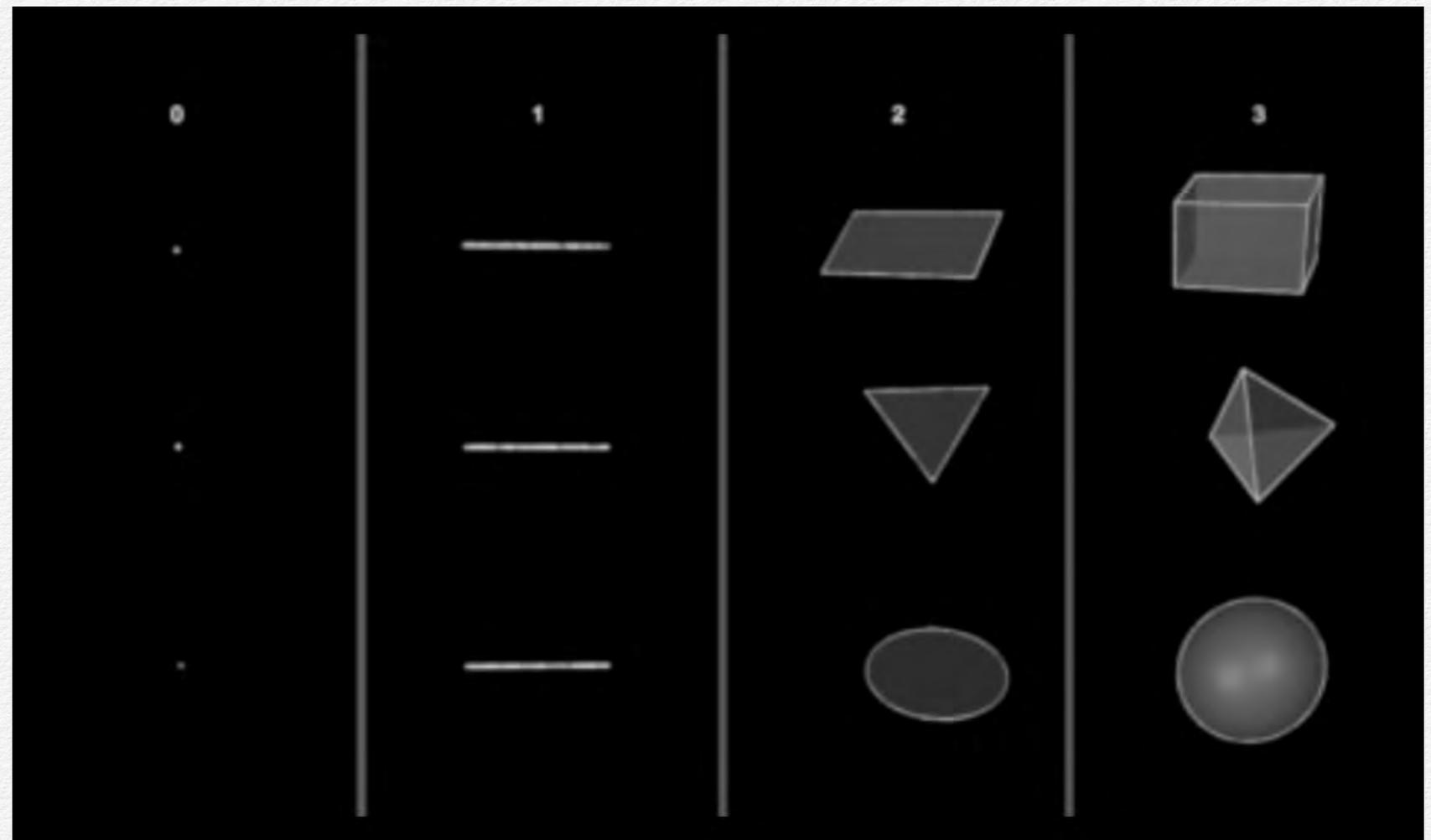
Esta parte do livro aborda conceitos básicos de Geometria e Topologia, incluindo a noção de dimensão e também definições de variedades bidimensionais, tridimensionais e espaços não-euclidianos.

# Dimensão

## Categoria de objetos em dimensões 0, 1, 2 e 3

Para ilustrar o conceito de dimensão, usamos três categorias de objetos que tem a sua equivalência em todas as dimensões: bolas, simplexos, e cubos.

A imagem mostra esses conceitos simultaneamente através dos objetos em cada uma dessas quatro dimensões. Primeiro uma bola, depois um simplexo e finalmente um cubo de dimensão 0, 1, 2 e 3.



**Figura 2.1** Objetos em suas quatro dimensões. A imagem apresenta o desenvolvimento progressivo das dimensões, a fim de ilustrar seus princípios construtivos. Por exemplo, no caso do cubo, são adicionadas progressivamente estruturas ortogonais para que o objeto passe de uma certa dimensão para uma superior.

## Geometria simplicial

As estruturas simpliciais constituem uma das maneiras mais simples de descrever objetos de uma certa dimensão de forma discreta e combinatória.

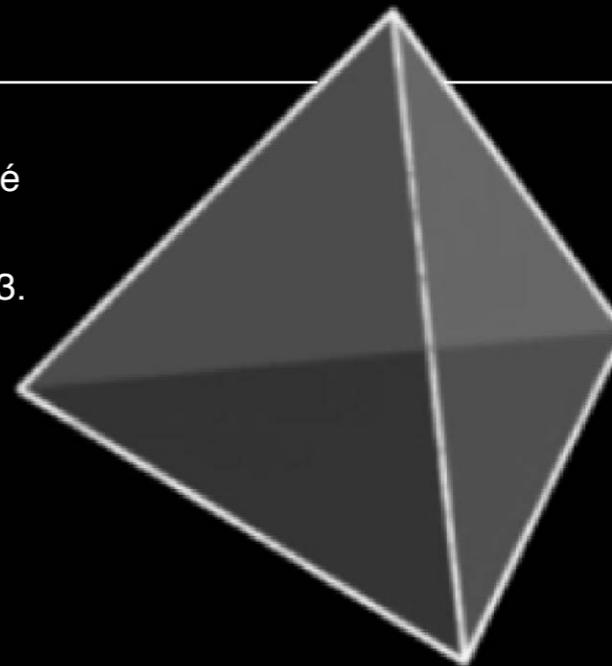
Um ponto é um simplexo de dimensão 0.



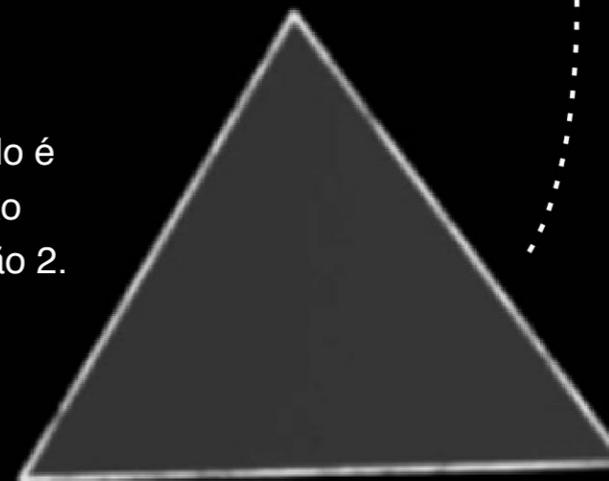
Um segmento de reta é um simplexo de dimensão 1.



Um tetraedro é um simplexo de dimensão 3.

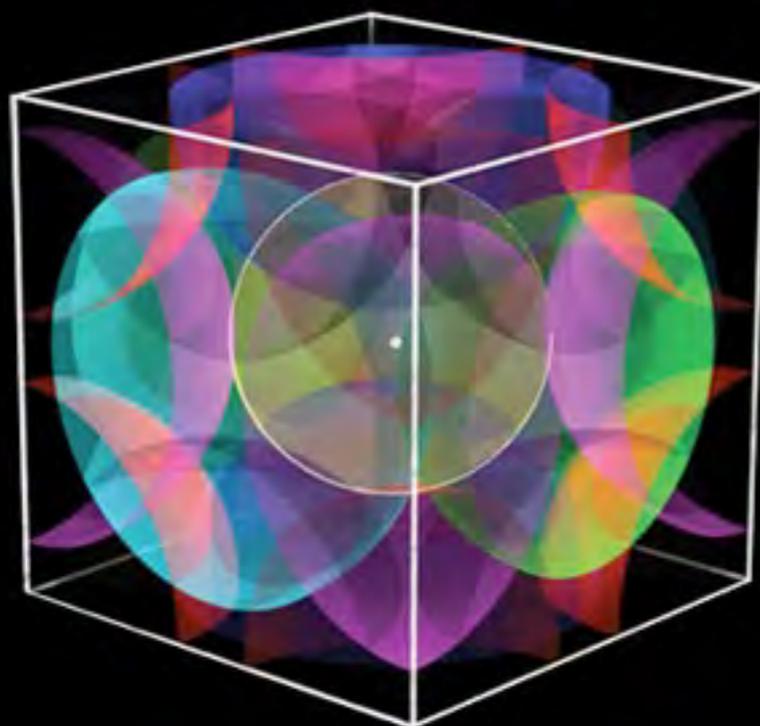


Um triângulo é um simplexo de dimensão 2.



# Variedades

Em Matemática, uma variedade é um espaço topológico que se assemelha localmente ao espaço euclidiano. Linhas e círculos são variedades unidimensionais. Variedades bidimensionais são também chamadas de superfícies. Exemplos incluem o plano, a esfera e o toro. Essas formas também têm equivalentes em dimensão três.



Em uma 3-variedade, os pontos vizinhos a um ponto formam uma bola. Uma hipersuperfície tridimensional é uma variedade de dimensão 3.

Em uma curva, os pontos vizinhos a um ponto formam um segmento. Uma curva é uma variedade de dimensão 1.

Em uma superfície, os pontos vizinhos a um ponto formam um disco. Uma superfície é uma variedade de dimensão 2.



# Construção

## Construindo variedades

Variedades com topologia globalmente diferente do espaço euclidiano podem ser construídas colando conjuntos de pontos.

A construção, no caso do toro, é bastante simples. O 1-toro, que é um círculo, é obtido através da colagem dos pontos inicial e final de um segmento. O 2-toro, que é um anel, é obtido por colagem de lados opostos de um quadrado preenchido. O 3-toro é obtido pela colagem das faces opostas de um cubo cheio.

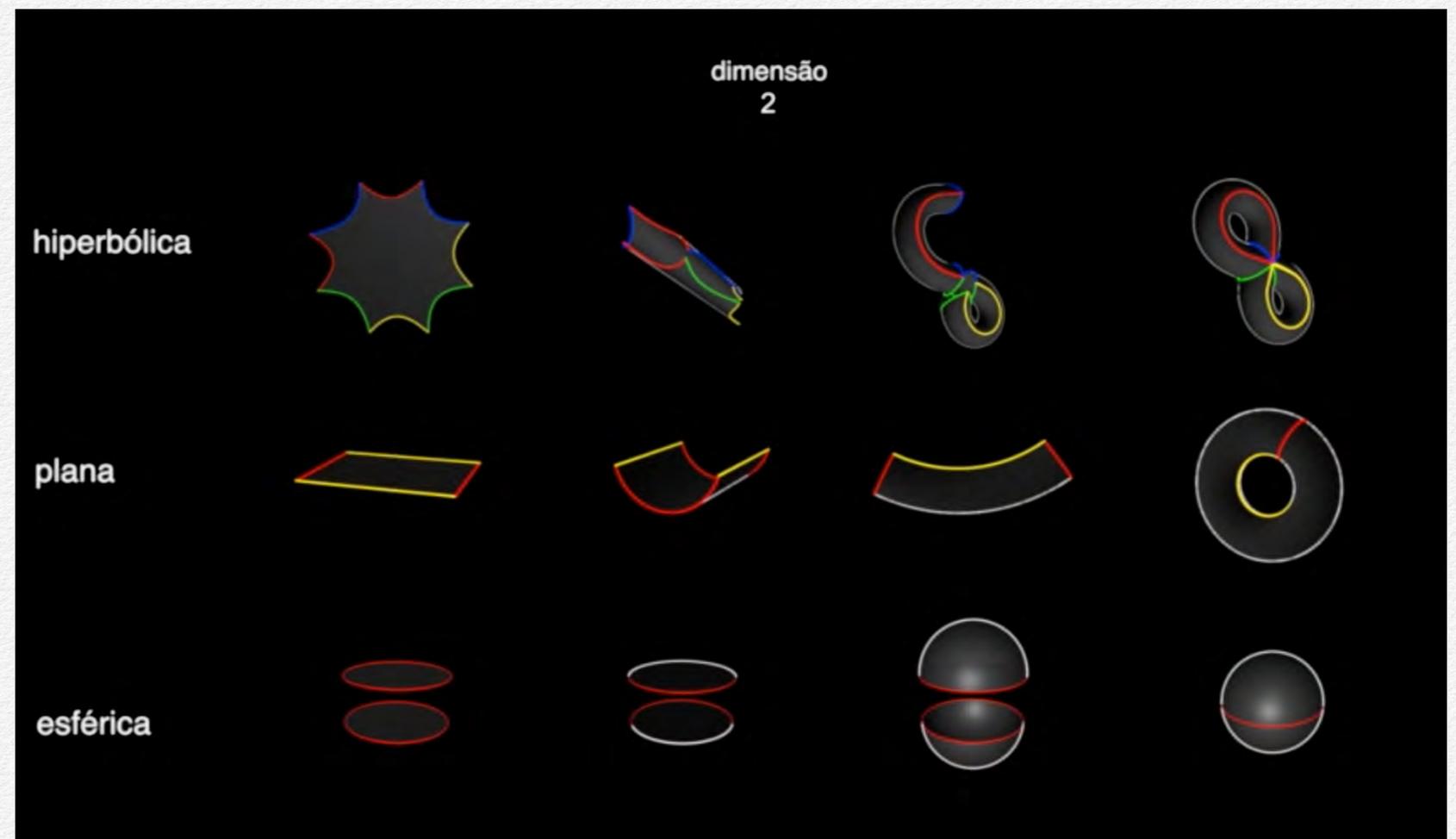
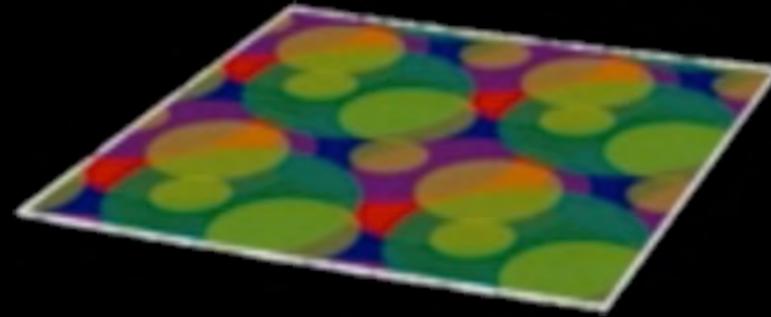


Figura 2.2 Construindo variedades. A imagem exemplifica a construção de variedades bidimensionais. A esfera, o toro e o bi-toro são construídos, respectivamente, nos espaços esférico, plano e hiperbólico.

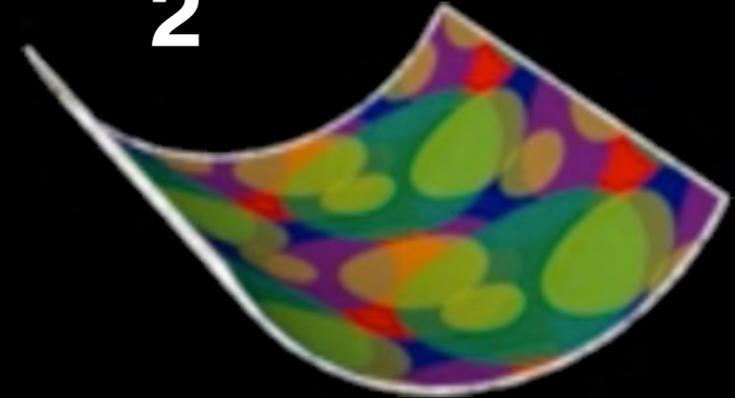
## Variedade de dimensão 2

Numa superfície fechada, a vizinhança de qualquer ponto forma um disco. Uma variedade de dimensão 2 é uma superfície.

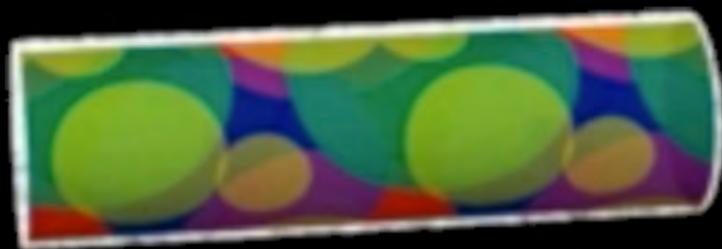
1



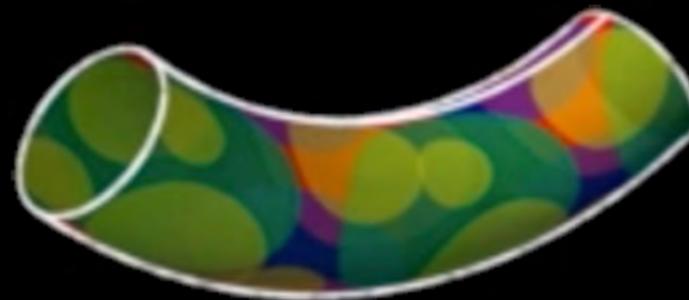
2



3



4

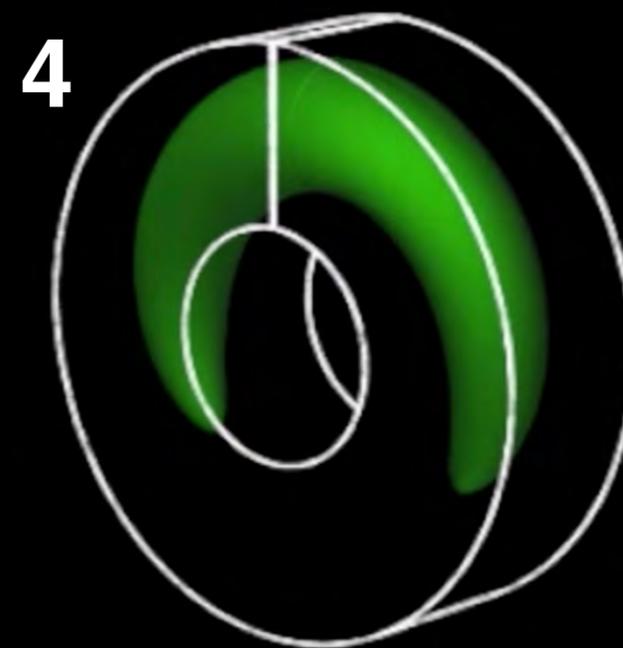
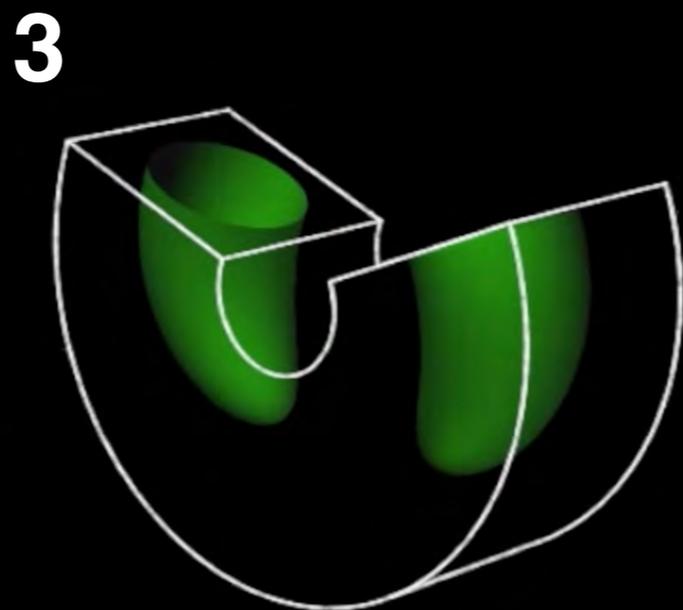
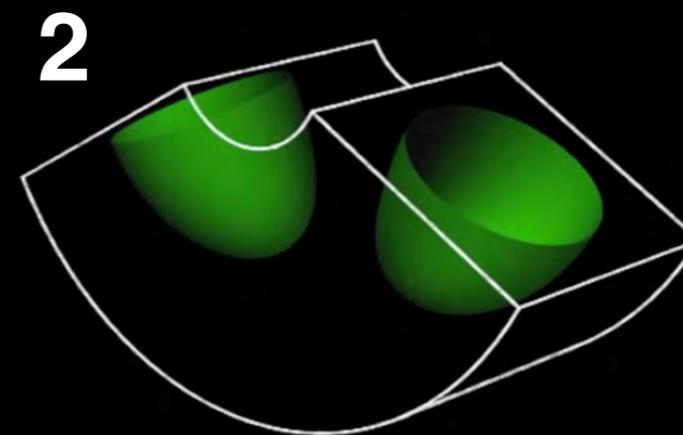
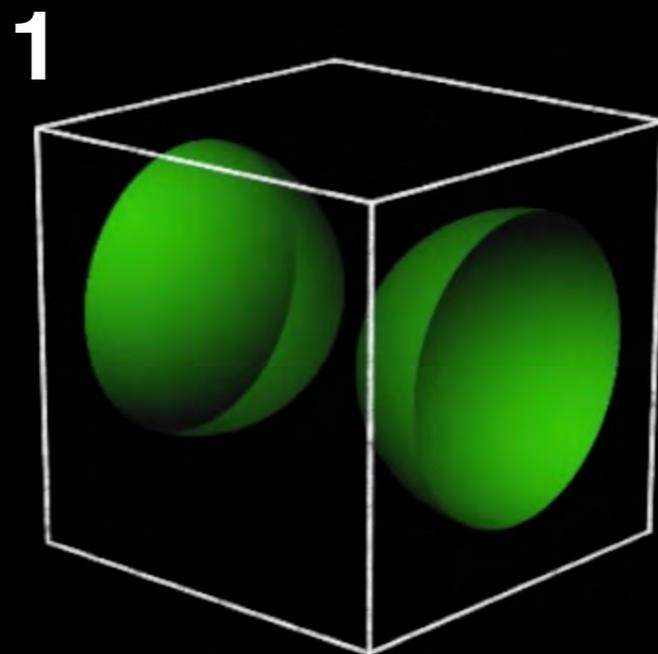


5



## Variedade de dimensão 3

Uma variedade de dimensão 3 é um espaço fechado cujos pontos têm por vizinhança uma bola sólida.



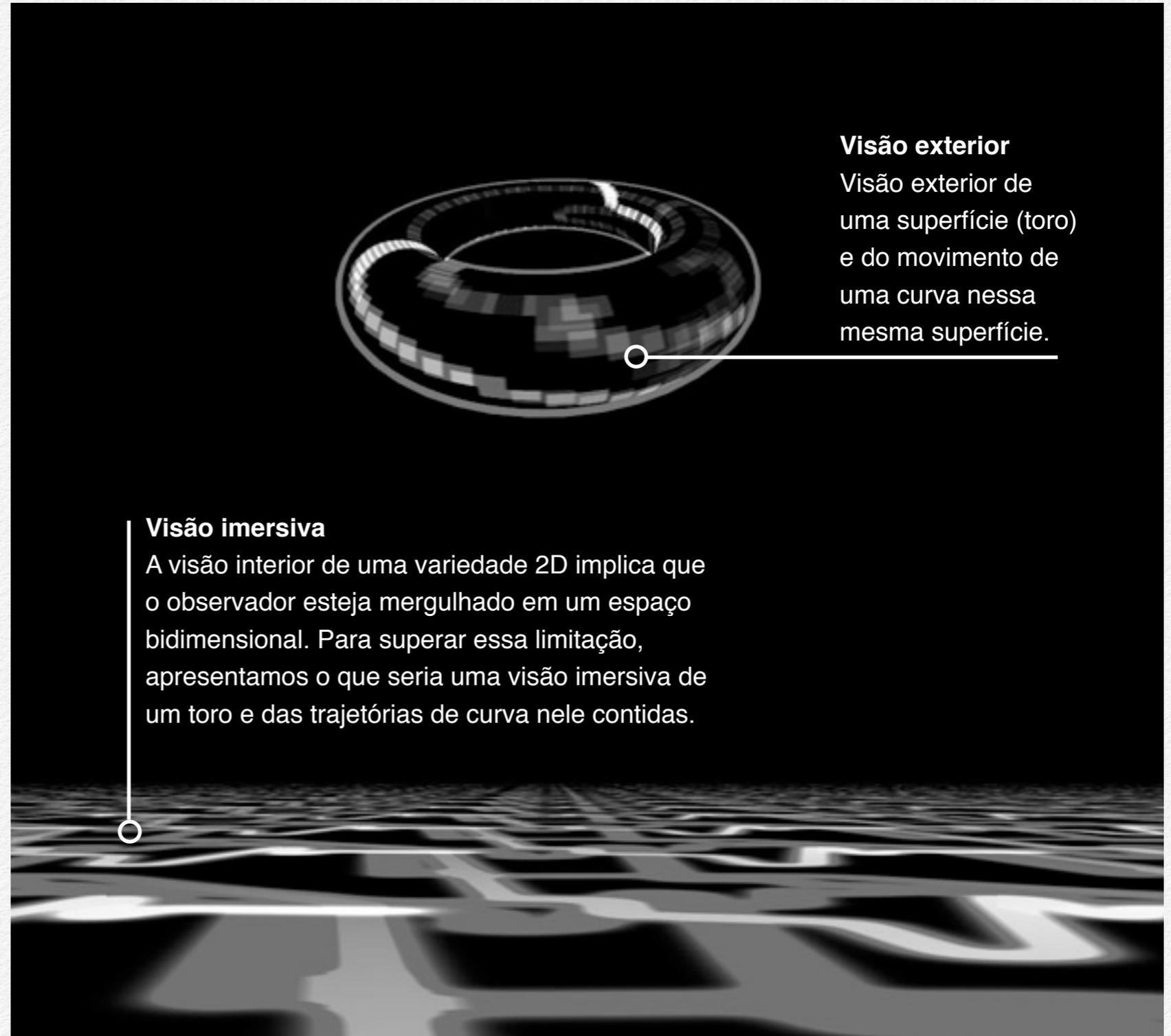
# Variedades de duas dimensões

Este capítulo concentra-se na visualização das variedades de duas dimensões. Ilustramos a redução de uma variedade até seu domínio fundamental e mostramos como objetos movimentam-se em espaços topológicos de duas dimensões.

# Variedades 2D

## Visão exterior e interior

Na visão exterior de uma variedade bidimensional, mergulhada em um espaço de dimensão 3, um observador pode ver a superfície a partir de diferentes pontos de vista nesse espaço.



### Visão exterior

Visão exterior de uma superfície (toro) e do movimento de uma curva nessa mesma superfície.

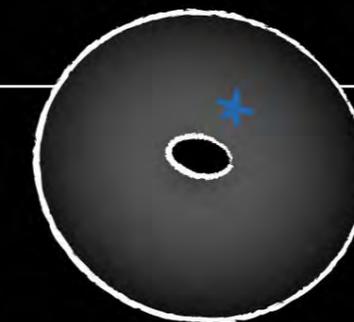
### Visão imersiva

A visão interior de uma variedade 2D implica que o observador esteja mergulhado em um espaço bidimensional. Para superar essa limitação, apresentamos o que seria uma visão imersiva de um toro e das trajetórias de curva nele contidas.

Figura 3.1 Visão exterior e imersiva de um toro e das trajetórias de curva.

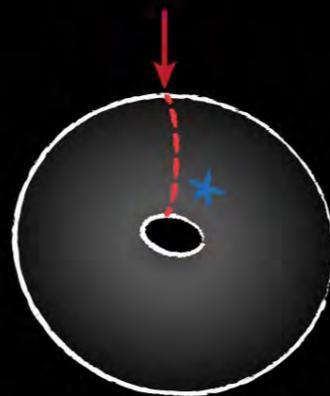
## Da variedade ao domínio fundamental

A sequência de imagens nesta página apresenta como uma variedade de duas dimensões pode ser “reduzida” até chegar ao seu domínio fundamental, que é um retângulo.

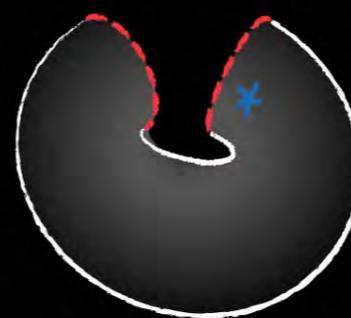


1 variedade (toro)

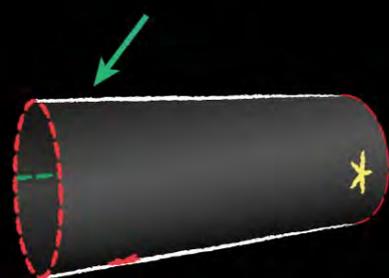
2 corta



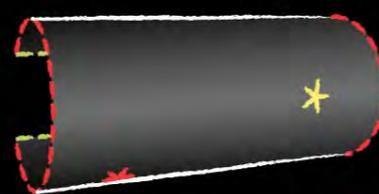
3 abre



4 corta



5 abre

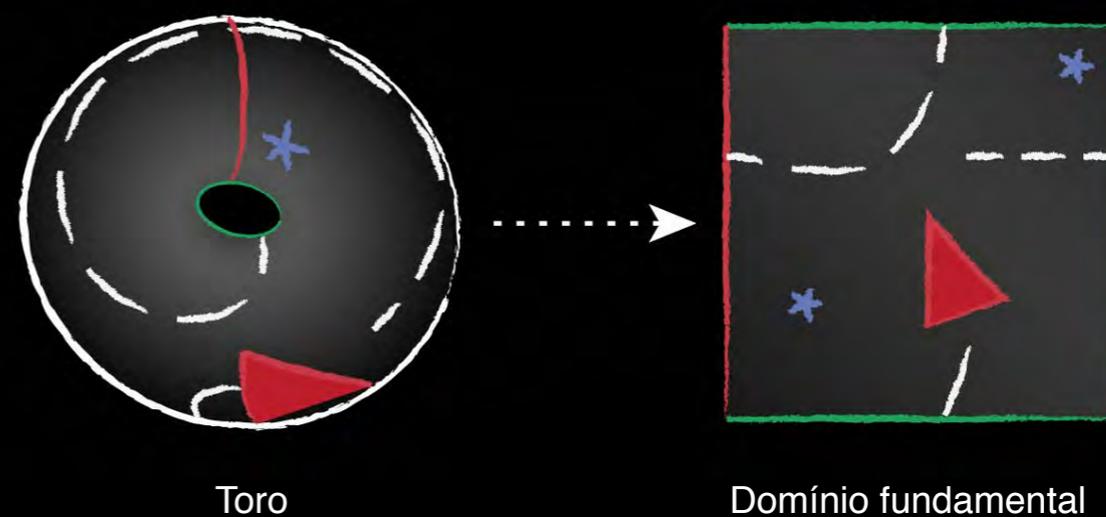
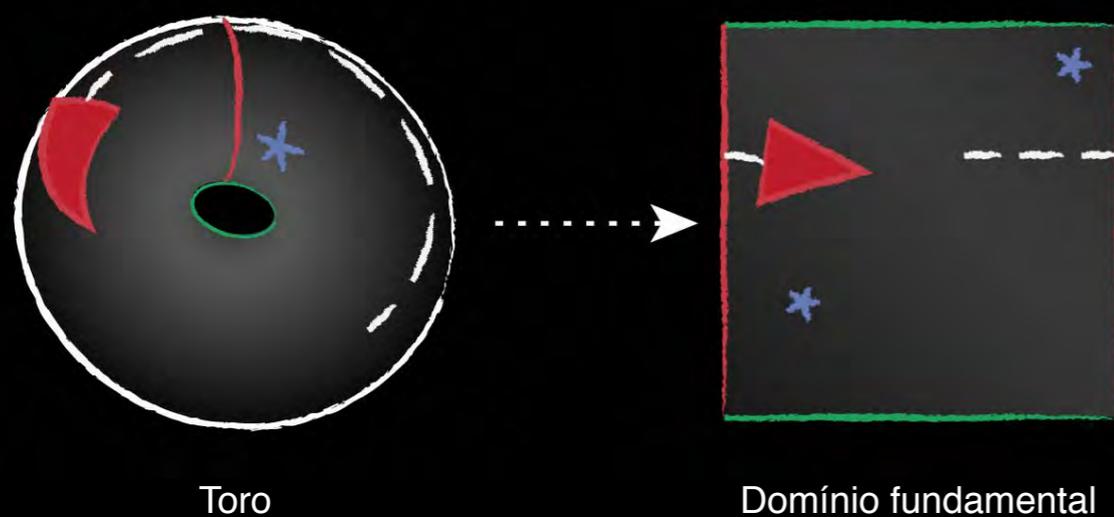
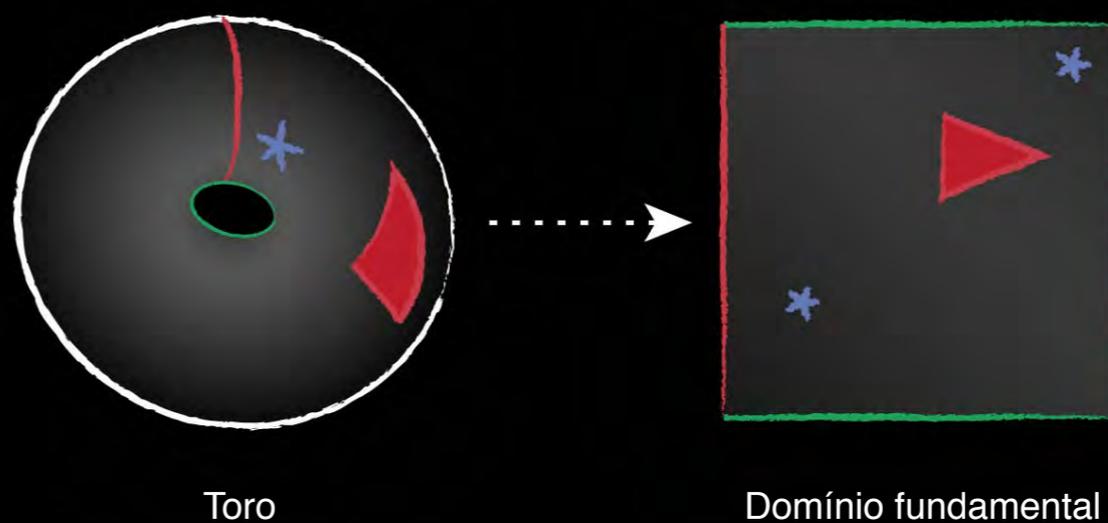


6 domínio fundamental



## Movimento de um objeto

As imagens nesta página ilustram o movimento de um objeto na variedade. Os objetos se deslocam na superfície do toro e tem deslocamento correspondente no domínio fundamental.



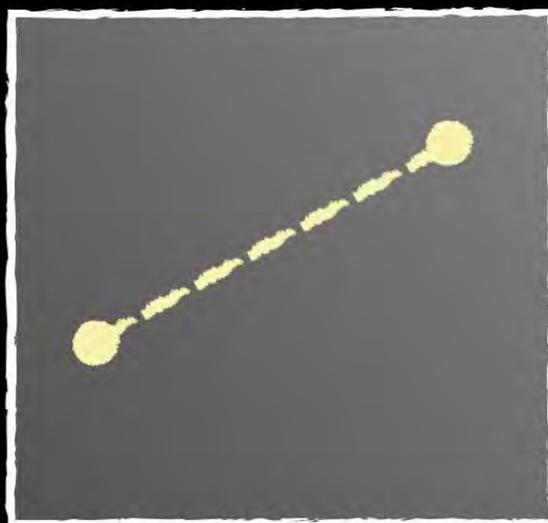
## Geodésica

Uma geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos. Intuitivamente, corresponde a um segmento de “reta” intrínseca na variedade.



Um raio de luz toma uma trajetória chamada geodésica, o caminho mais curto entre dois pontos.

A sequência de imagens visualiza a trajetória de uma geodésica respectivamente no plano, no cilindro e no toro.



Quadrado



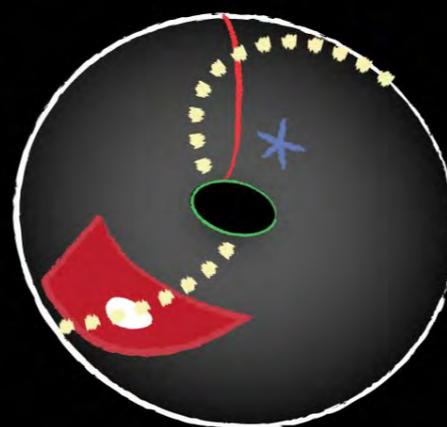
Cilindro



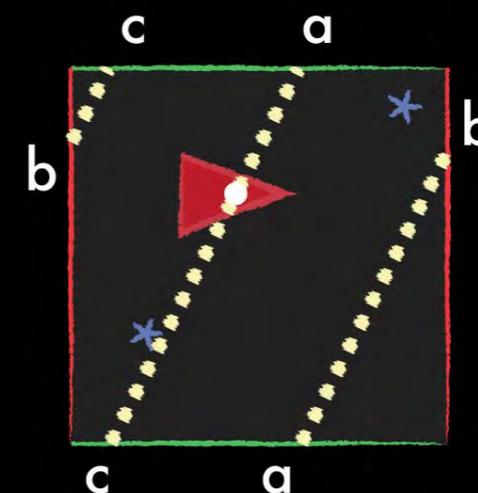
Toro

## Trajetoória de um raio de luz

Um raio de luz segue a trajetória de uma curva geodésica na variedade, pois a luz se propaga seguindo o caminho mais curto.



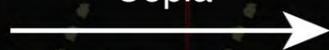
Variedade (toro)



Domínio fundamental

Na ilustração, pode-se observar a trajetória de um raio de luz que tem origem em um objeto no toro e retorna ao objeto depois de percorrer a superfície. O raio entra e sai do domínio fundamental nos pontos (a), (b) e (c).

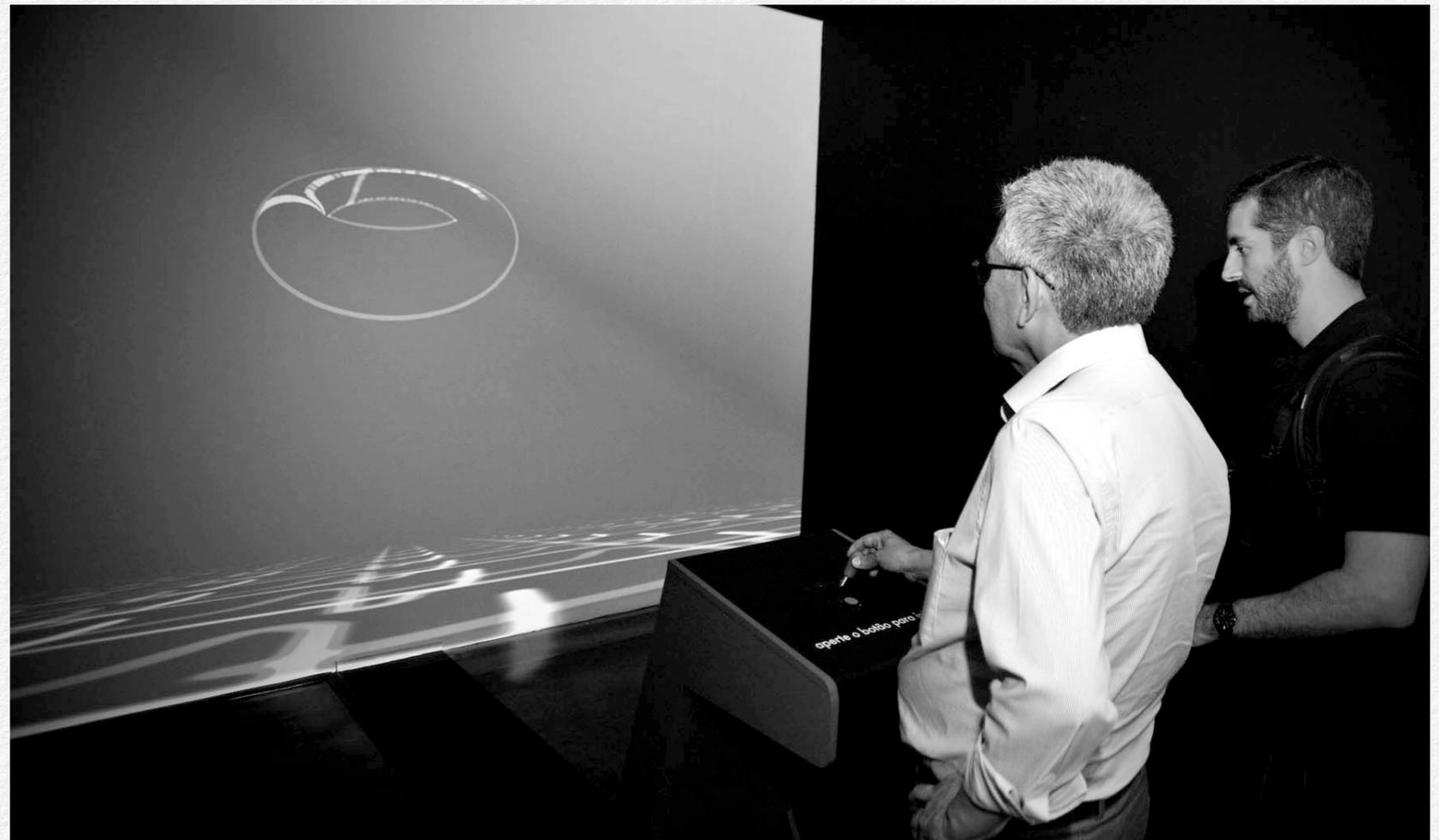
Copia



# Visualização interativa 2D

A exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3” tem instalações para visualização interativa das variedades. Seu objetivo é permitir uma investigação intuitiva das variedades de dimensão 2 e 3. A primeira instalação mostra a relação entre a geometria da superfície e a visão de um ponto de vista exterior. Trata-se de uma projeção com as três superfícies básicas: a esfera, o toro e o bi-toro (com dois furos).

O visitante escolhe entre uma delas para realizar a interação. Na instalação, uma partícula é desenhada na superfície escolhida e simultaneamente numa visão imersiva do ponto de vista do observador.



**Figura 3.2** Instalação 2D: numa mesa interativa, encontra-se um controle. Se a posição do controle é deslocada para a direita ou para esquerda, a partícula se move nessa “direção” na superfície.

## A instalação 2D

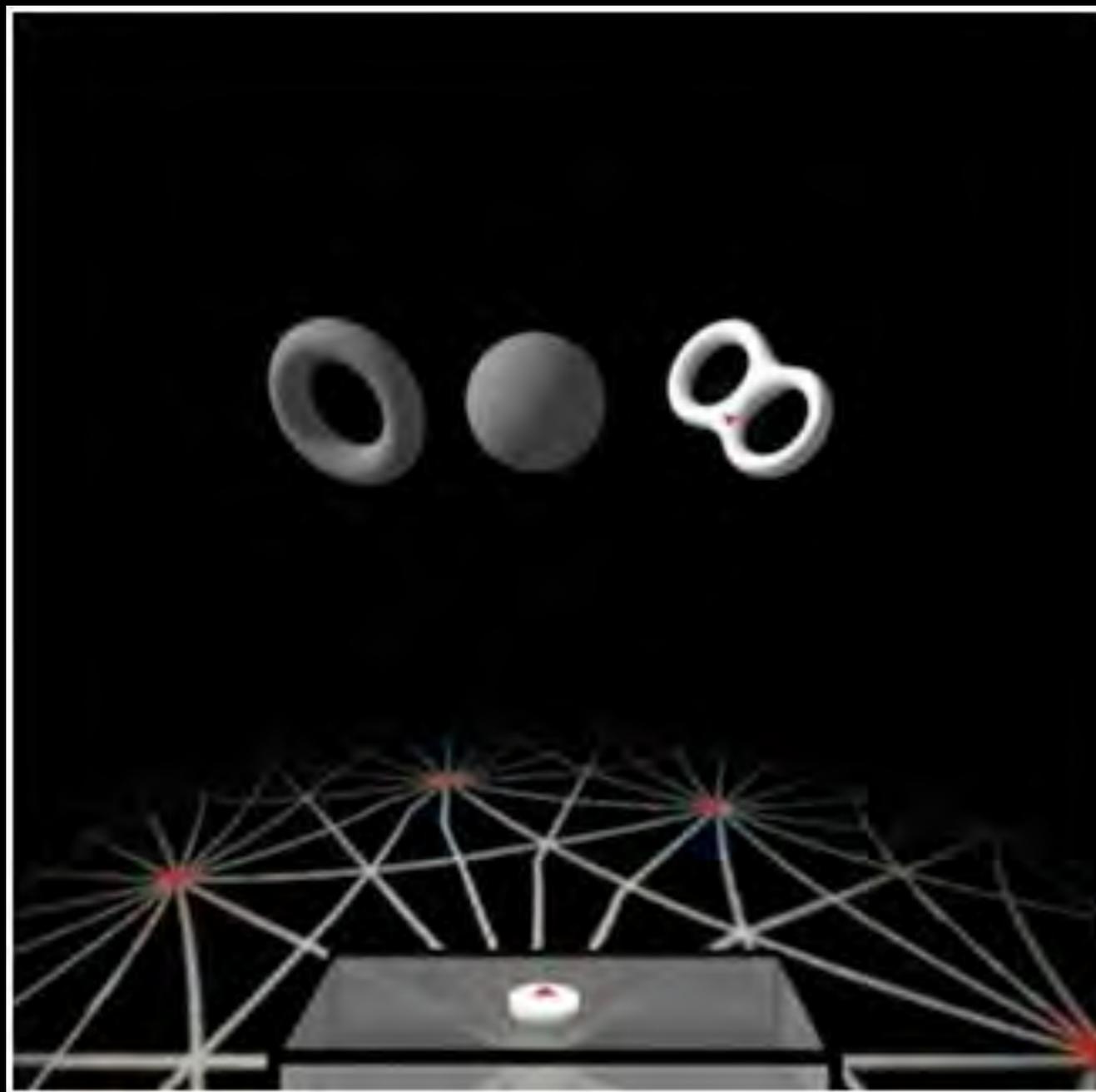
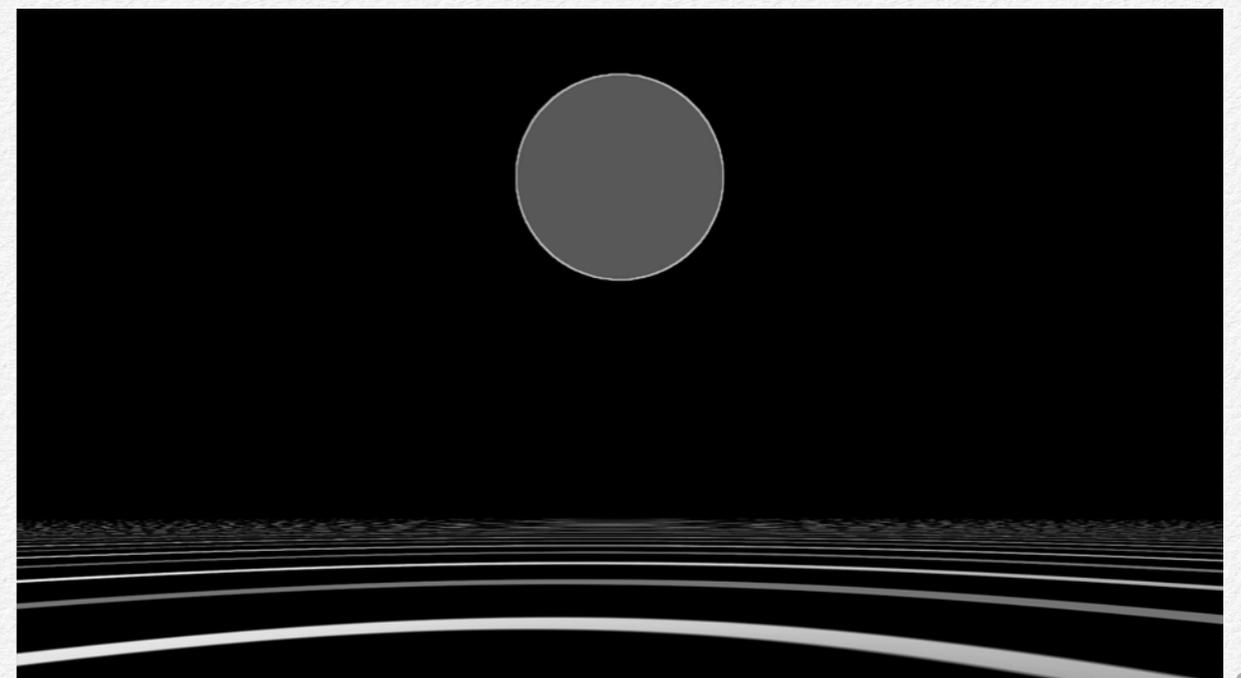
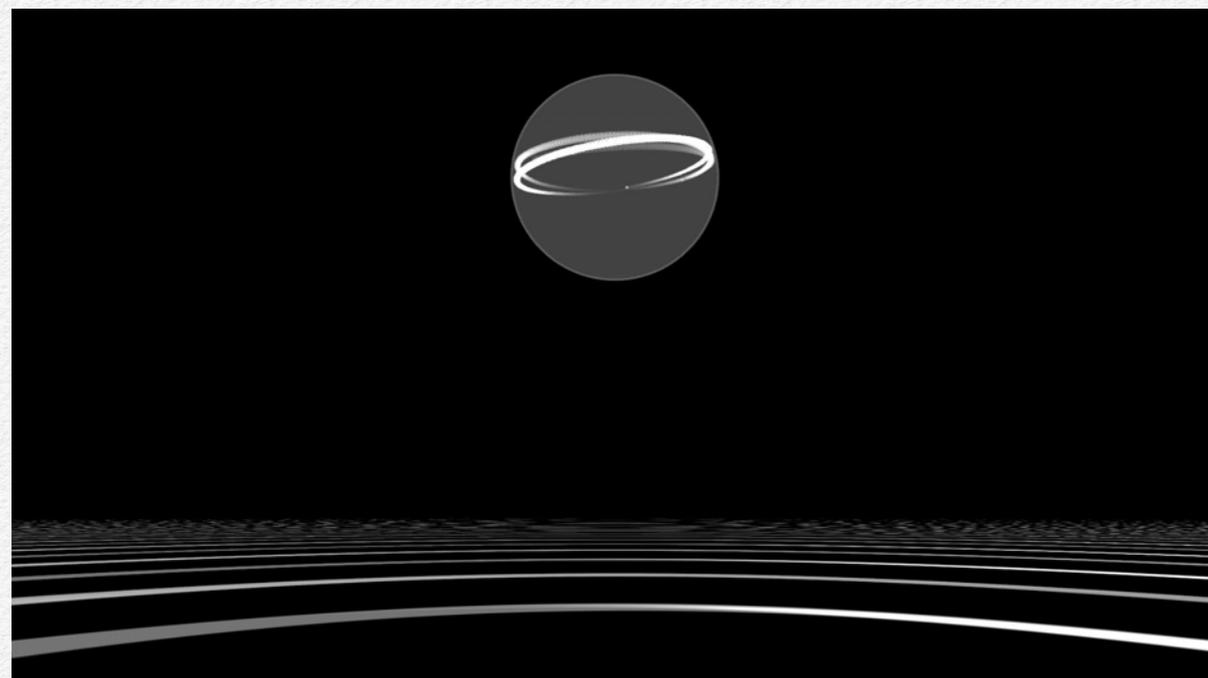
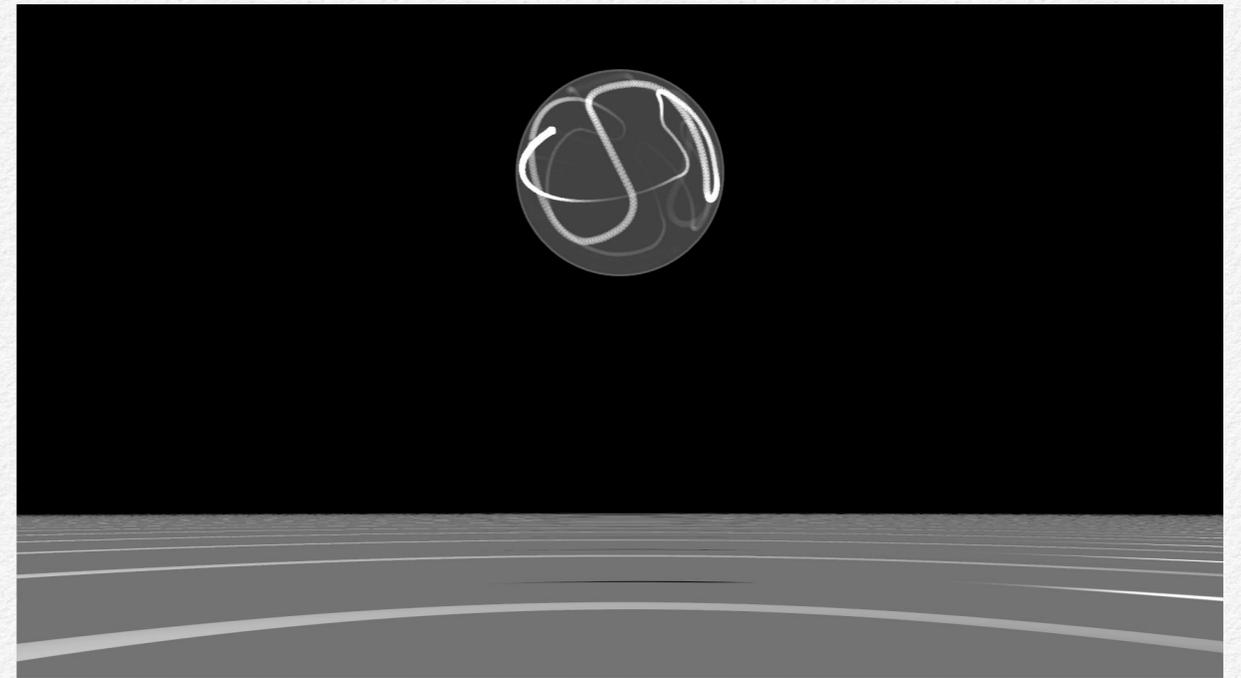


Figura 3.3 Como consequência da interação do visitante, o programa traça um segmento de curva. Dessa forma, pode-se desenhar curvas sobre a superfície escolhida. Depois de um tempo, a parte inicial da curva desaparece, como se tivesse sido produzida por um rastro de uma partícula com baixa persistência.

---

## Galeria 2D - espaço esférico

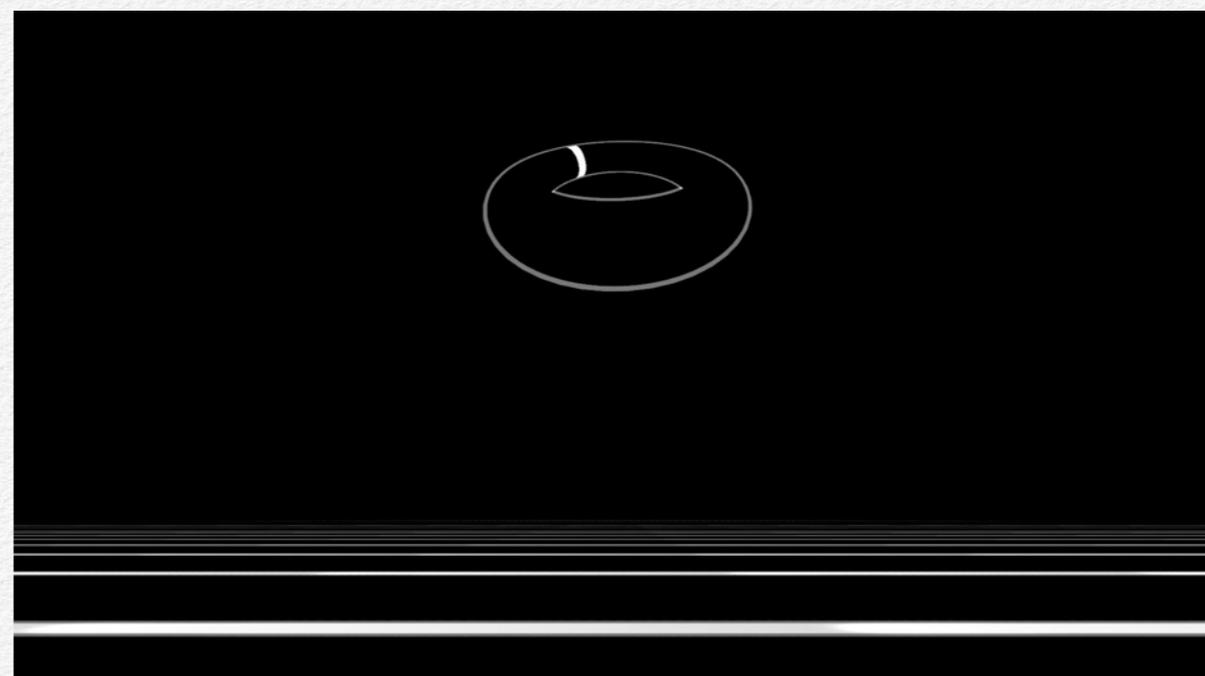
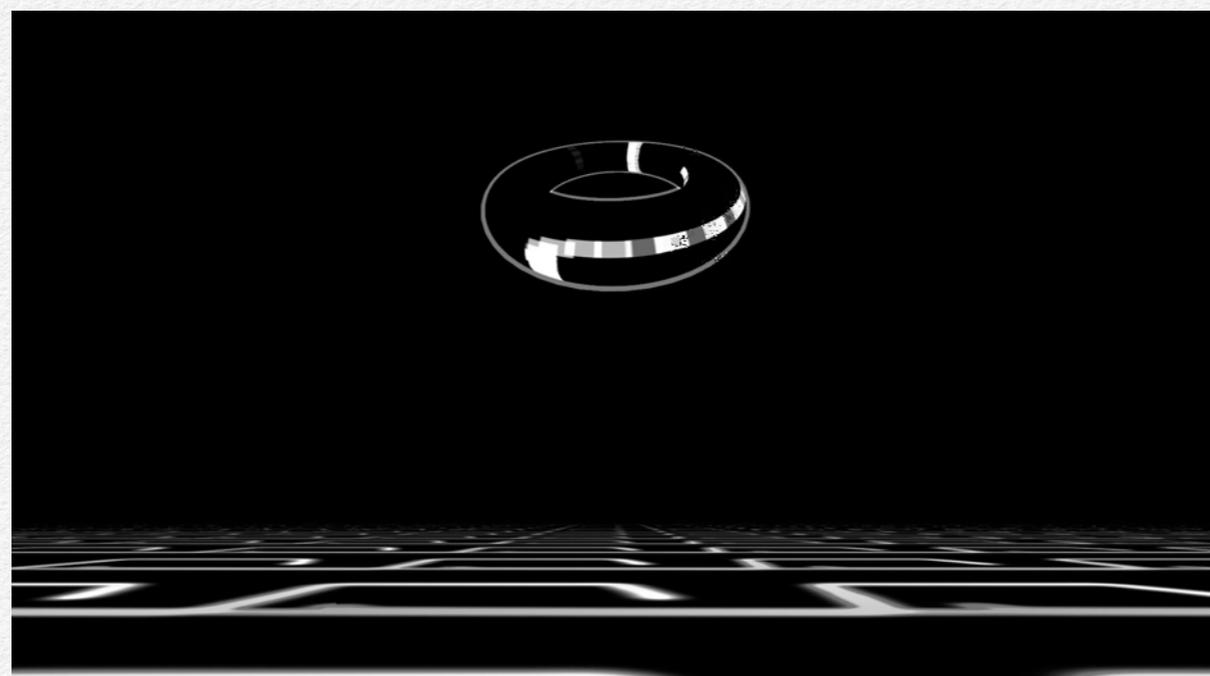
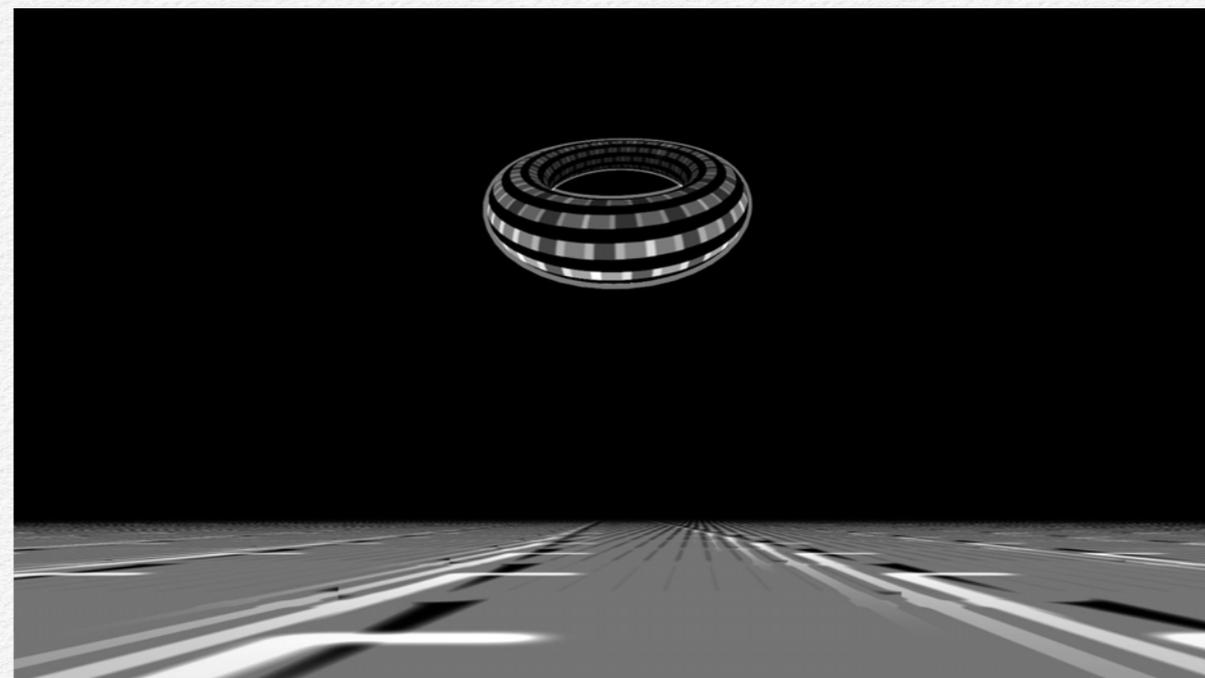
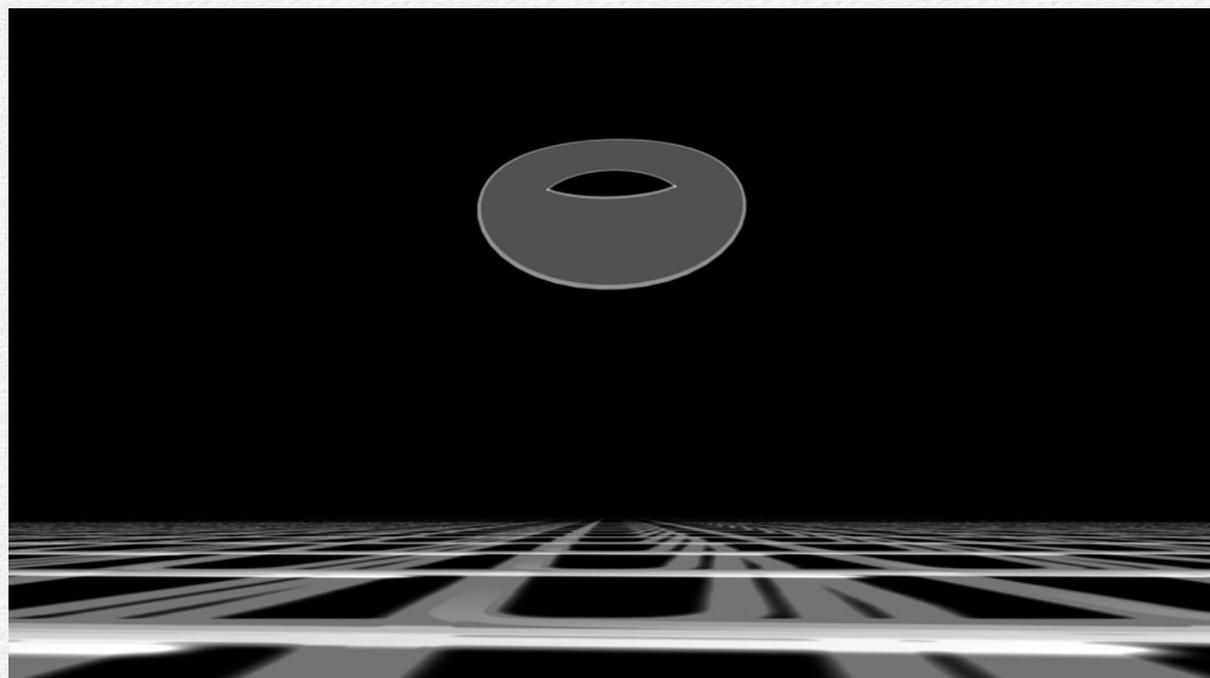
Imagens da **esfera** criadas pelos visitantes da exposição através da instalação 2D.



---

## Galeria 2D - espaço euclidiano

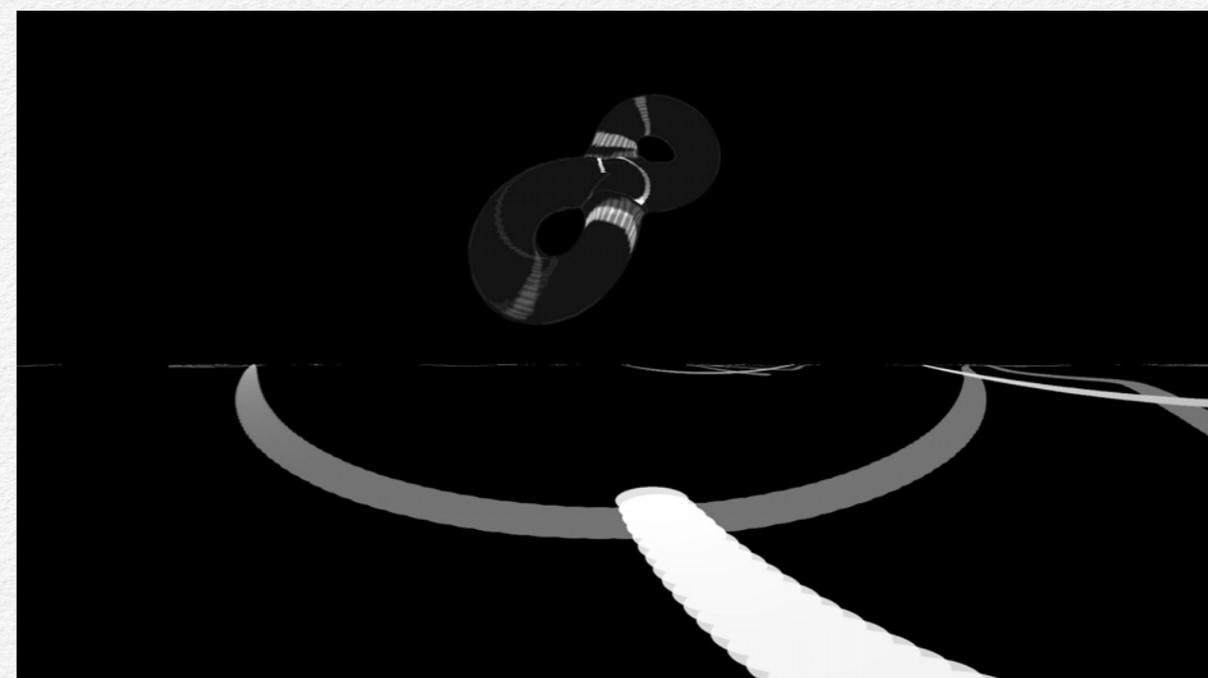
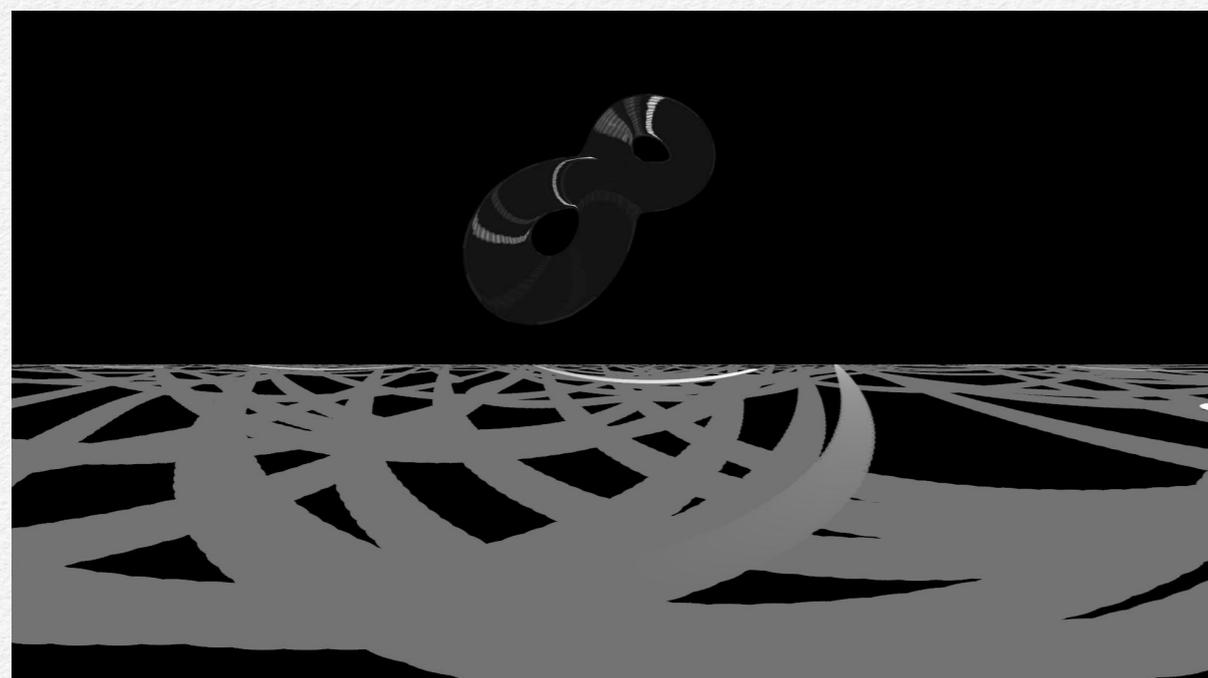
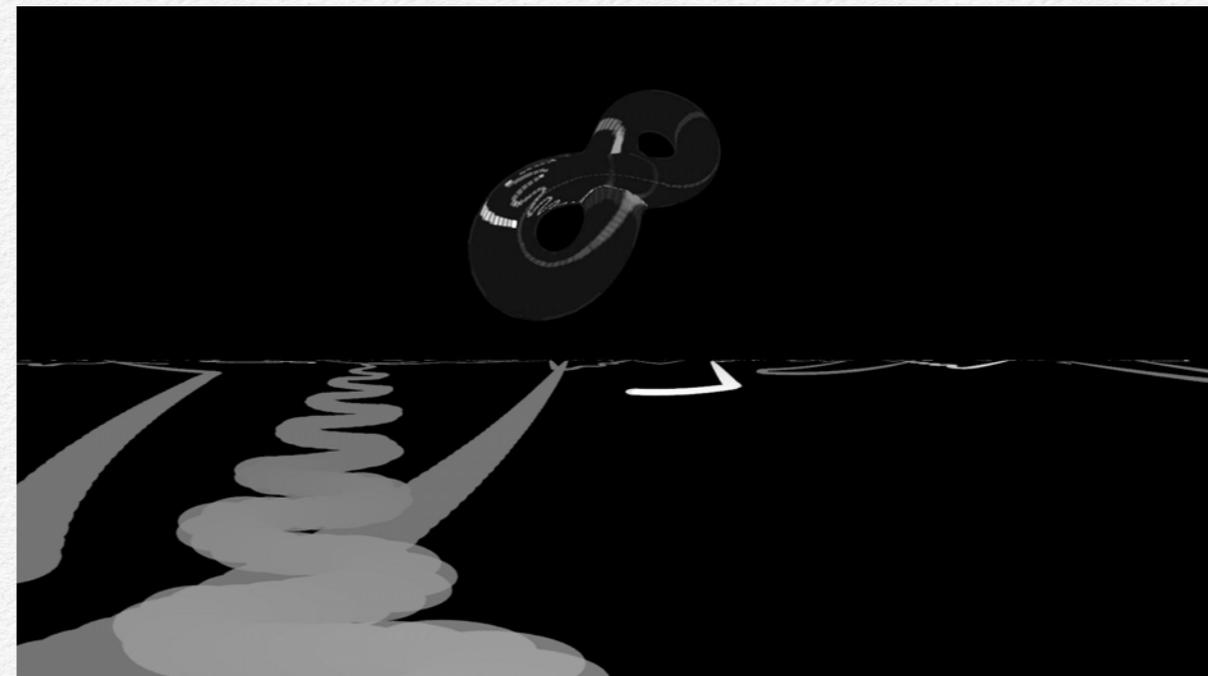
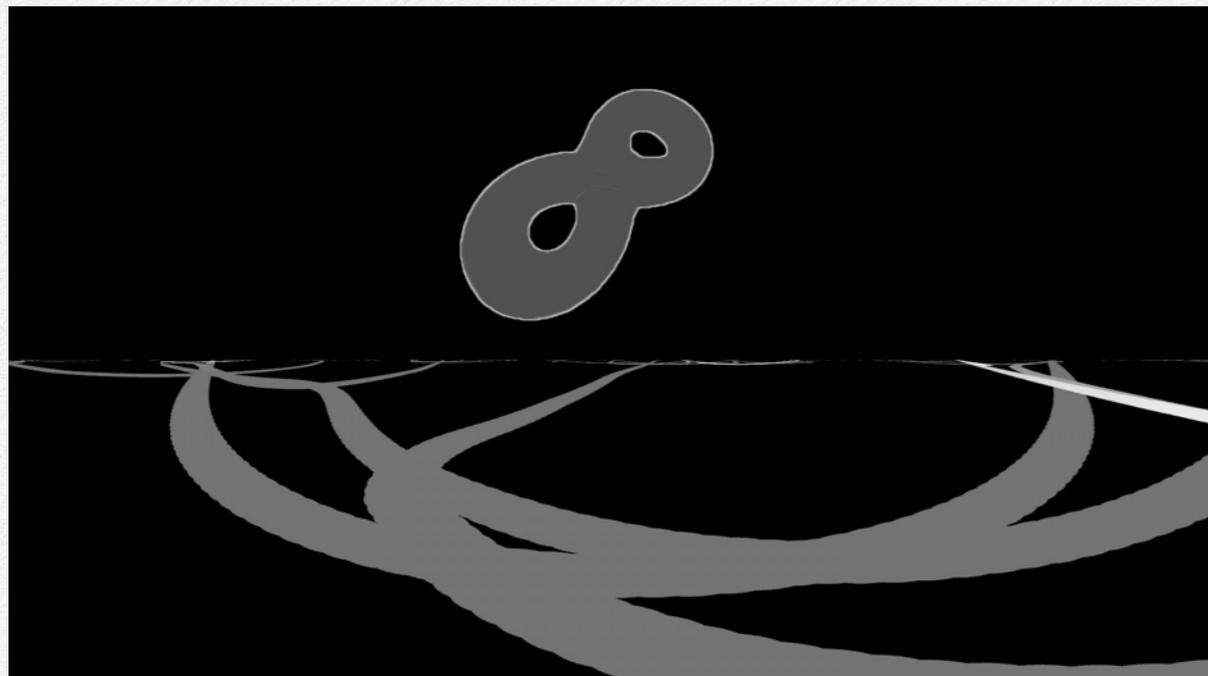
Imagens do **toro** criadas pelos visitantes da exposição através da instalação 2D.



---

## Galeria 2D - espaço hiperbólico

Imagens do **bi-toro** criadas pelos visitantes da exposição através da instalação 2D.



# Variedades de três dimensões

Este capítulo investiga a visualização das variedades tridimensionais. Mostramos como a luz se propaga dentro de uma variedade e apresentamos a visão interior do panorama formado pelo rastro de partículas que se movimentam no espaço.

# Variedades 3D

## Visão exterior e interior

Na visão interior de uma variedade de três dimensões, a curva formada pela trajetória de uma partícula é repetida em outras direções e distâncias.

A visão exterior de uma variedade de três dimensões não pode ser representada pois seria necessário que o observador estivesse em uma quarta dimensão.



Figura 4.1 Visão interior de uma variedade de três dimensões.

## Variedade de dimensão 3

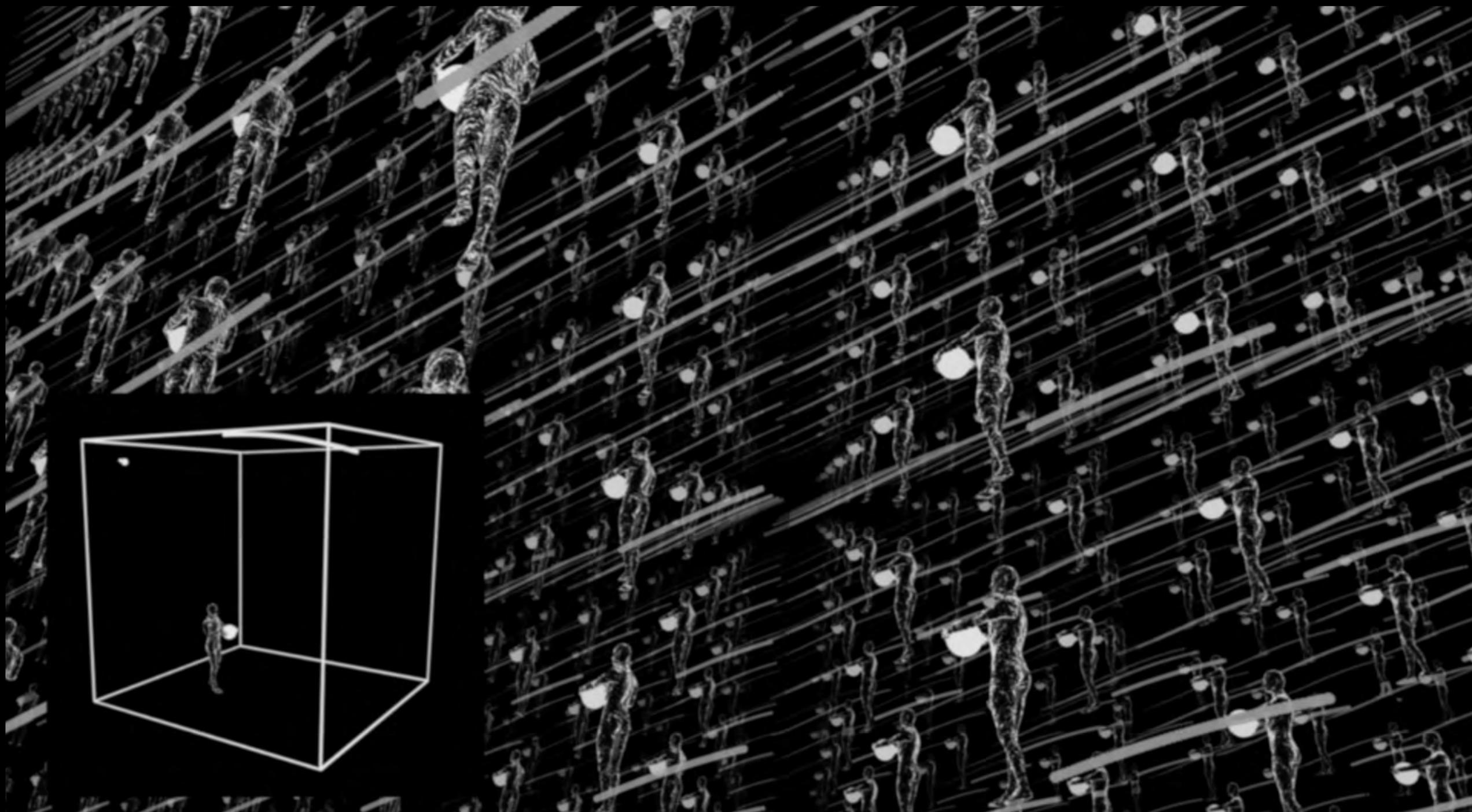


Figura 4.2 Visualização do rastro da trajetória de uma partícula no interior do toro de dimensão 3. A janela no canto inferior esquerdo mostra o mesmo movimento no domínio fundamental.

## Pseudo-Variiedade de dimensão 3

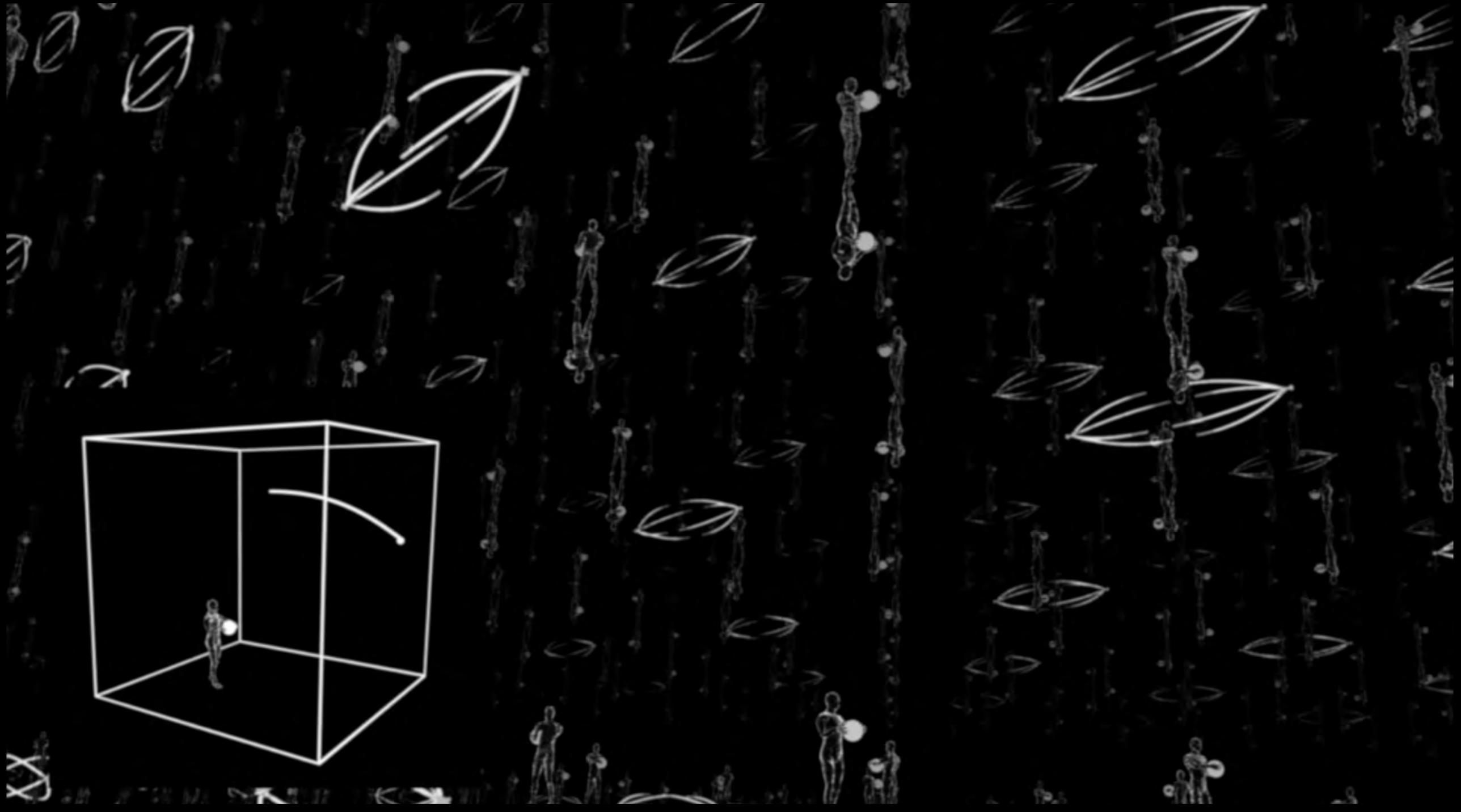


Figura 4.3 Visualização do rastro da trajetória de uma partícula no interior de um cubo formado por seis espelhos. A janela no canto inferior esquerdo mostra o mesmo movimento no domínio fundamental.

# Visualização interativa 3D

A segunda instalação da exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3” simula a visualização no interior de uma variedade tridimensional. Da mesma forma que na instalação 2D, o visitante inicia a interação escolhendo entre uma das variedades: plana, esférica ou hiperbólica.

O controle de interação é sustentado por uma corda elástica no meio da sala. Tal como no caso de dimensão 2, existem muitos feixes de luz que começam e terminam em uma mesma partícula. Assim, o visitante, ao controlar a trajetória da partícula, vê a mesma curva repetida em várias direções e distâncias. Como antes, as curvas são desenhadas em função da posição da partícula.

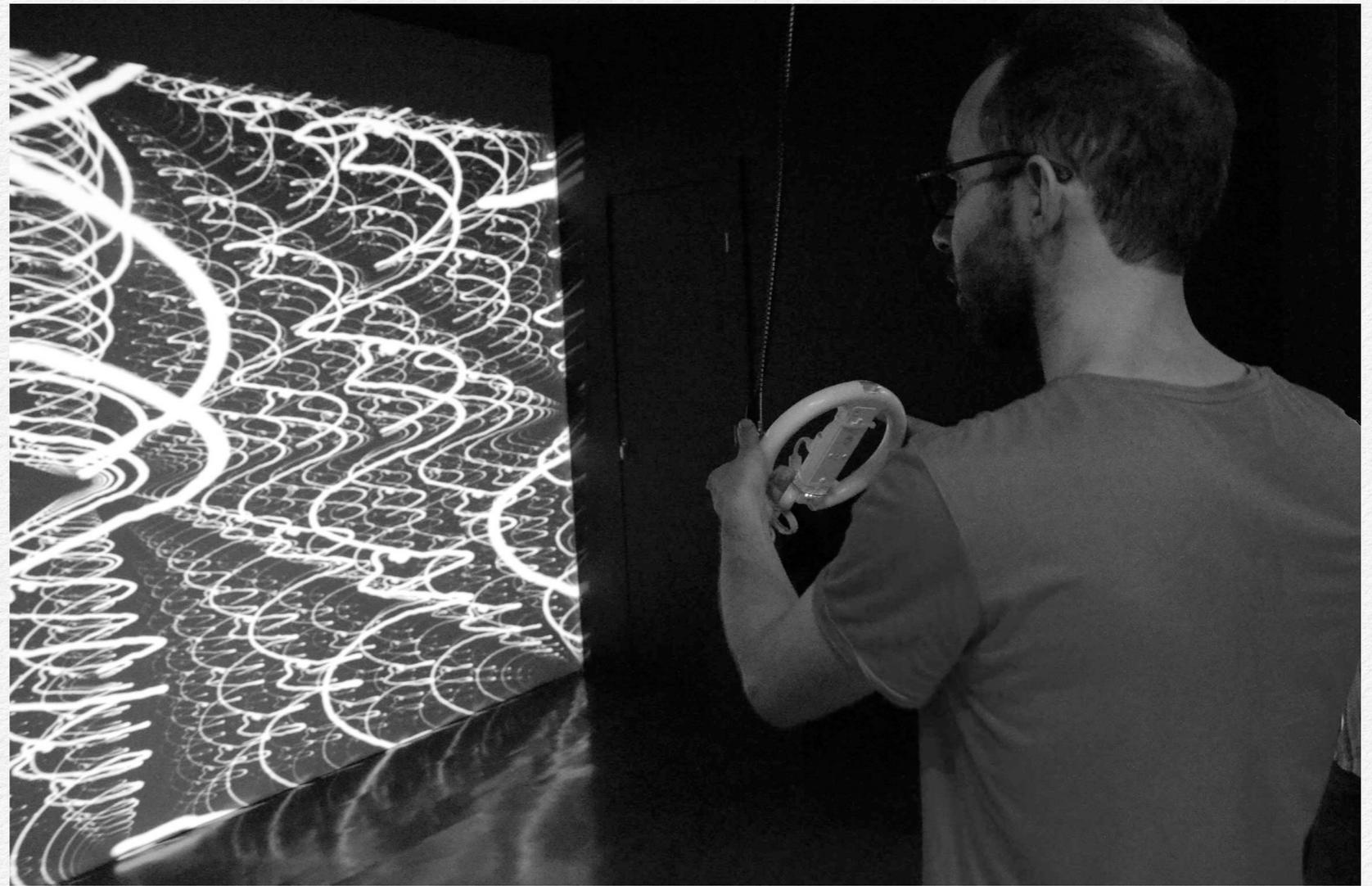


Figura 4.4 Instalação 3D: consiste em um espaço aberto com um controle e uma tela de projeção.

## A instalação 3D

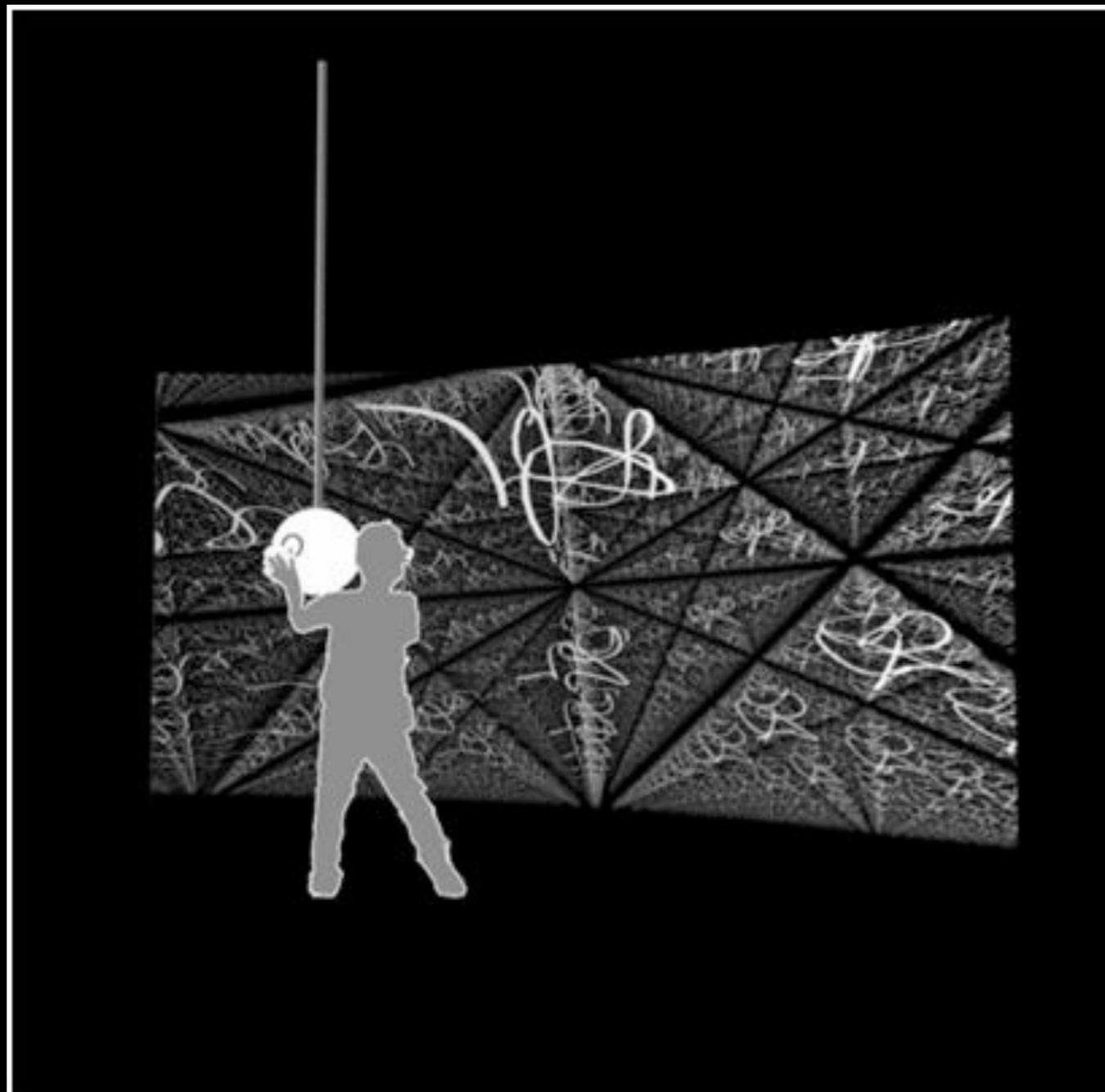
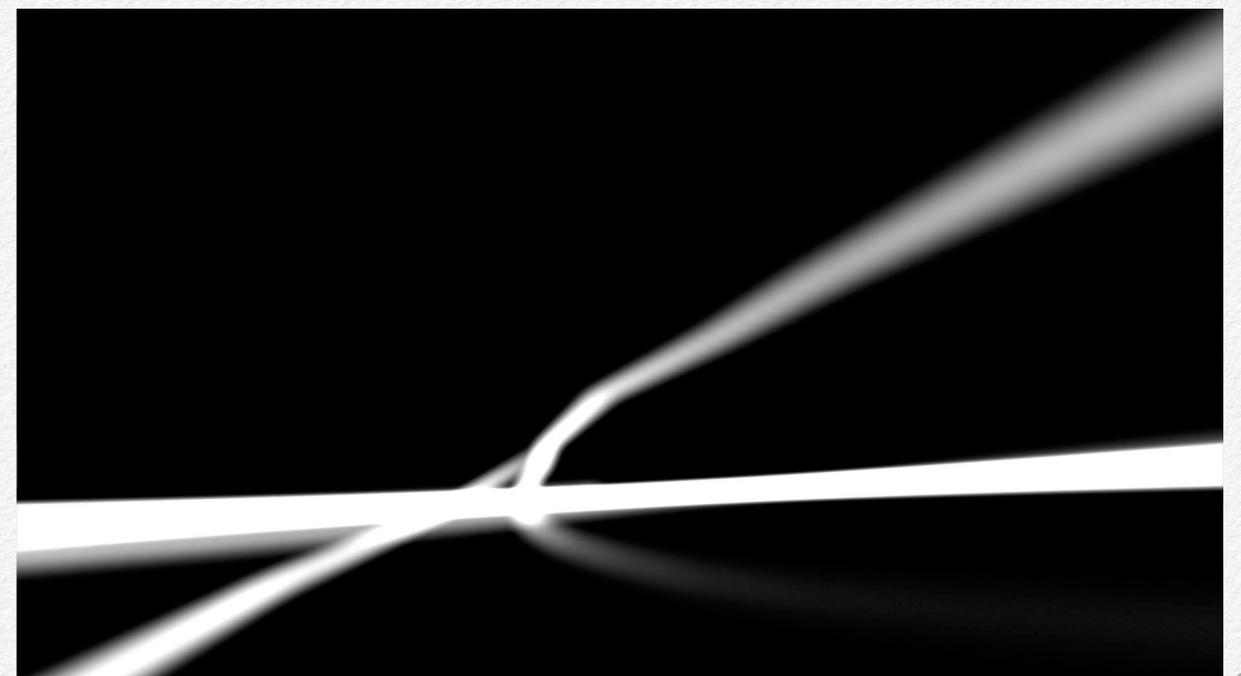
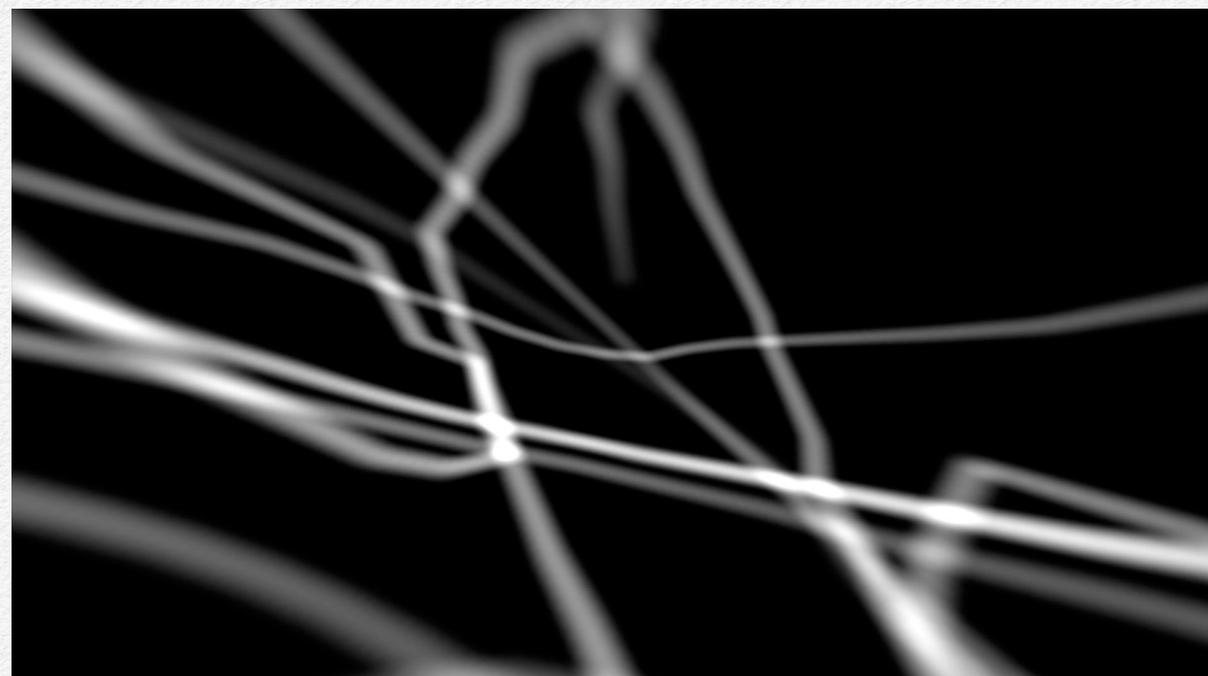
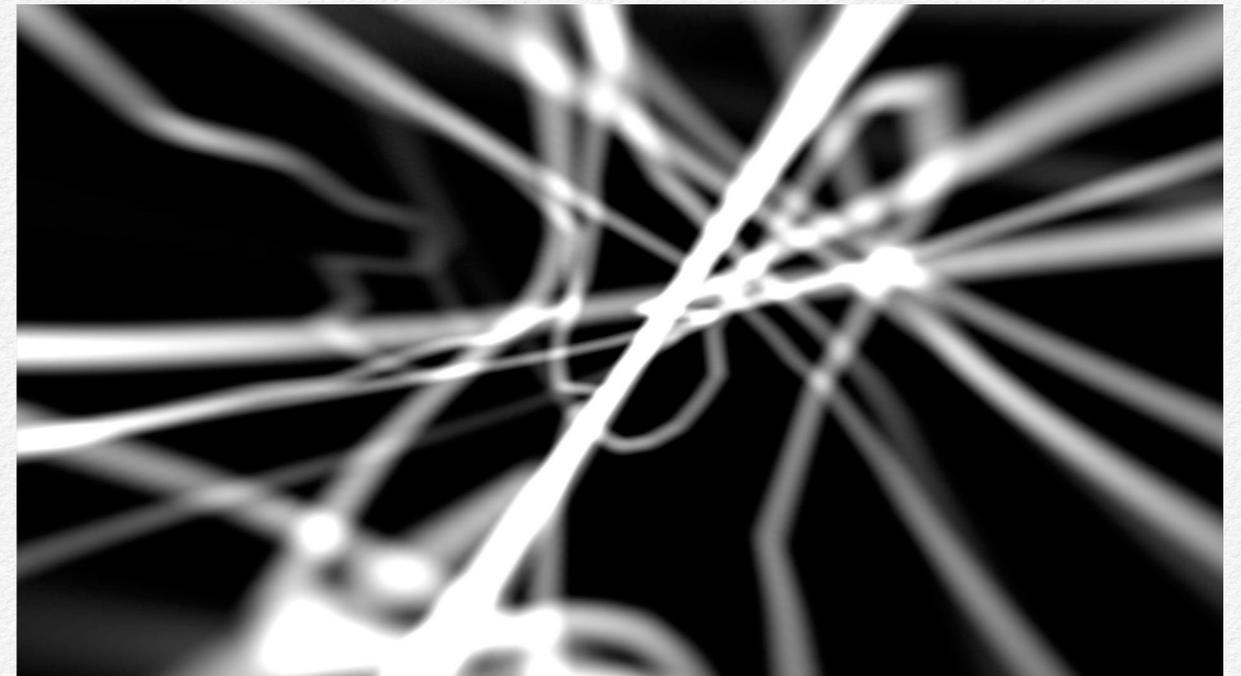


Figura 4.5 A instalação permite desenhar uma curva em três espaços diferentes: esférico, plano e hiperbólico, respectivamente. Existe somente uma curva representada, mas ela é mostrada diversas vezes pelo fato que a luz dá volta nesses espaços.

---

## Galeria 3D - espaço esférico

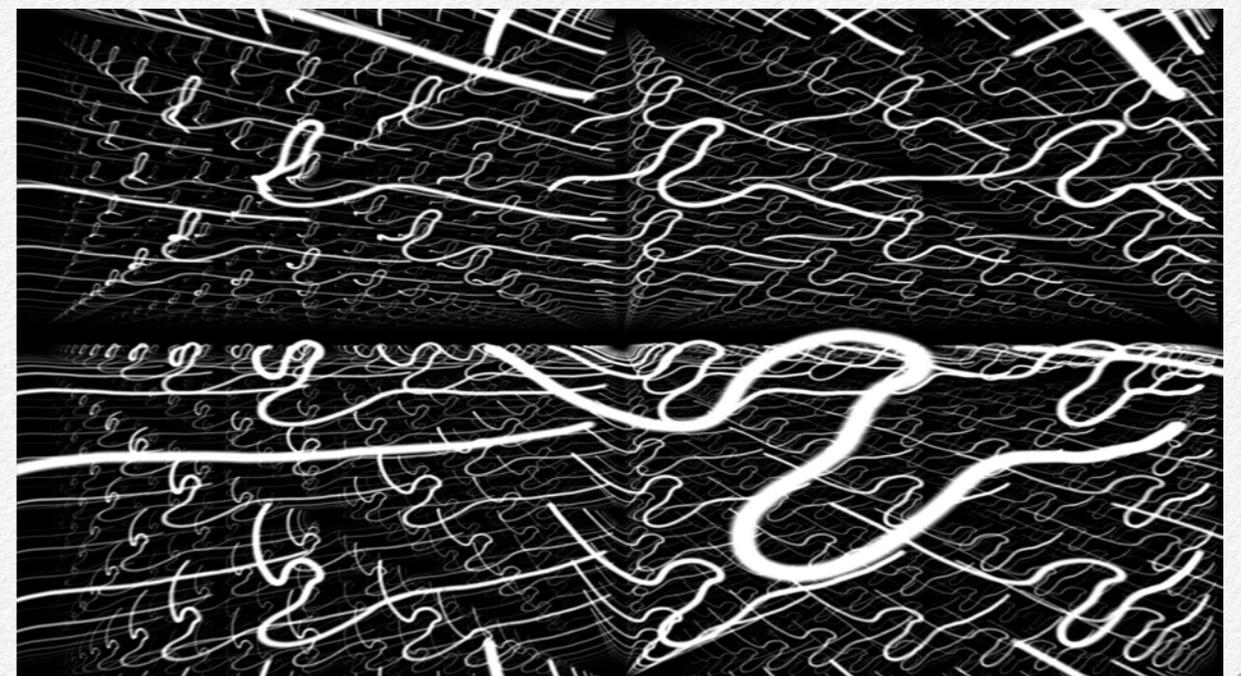
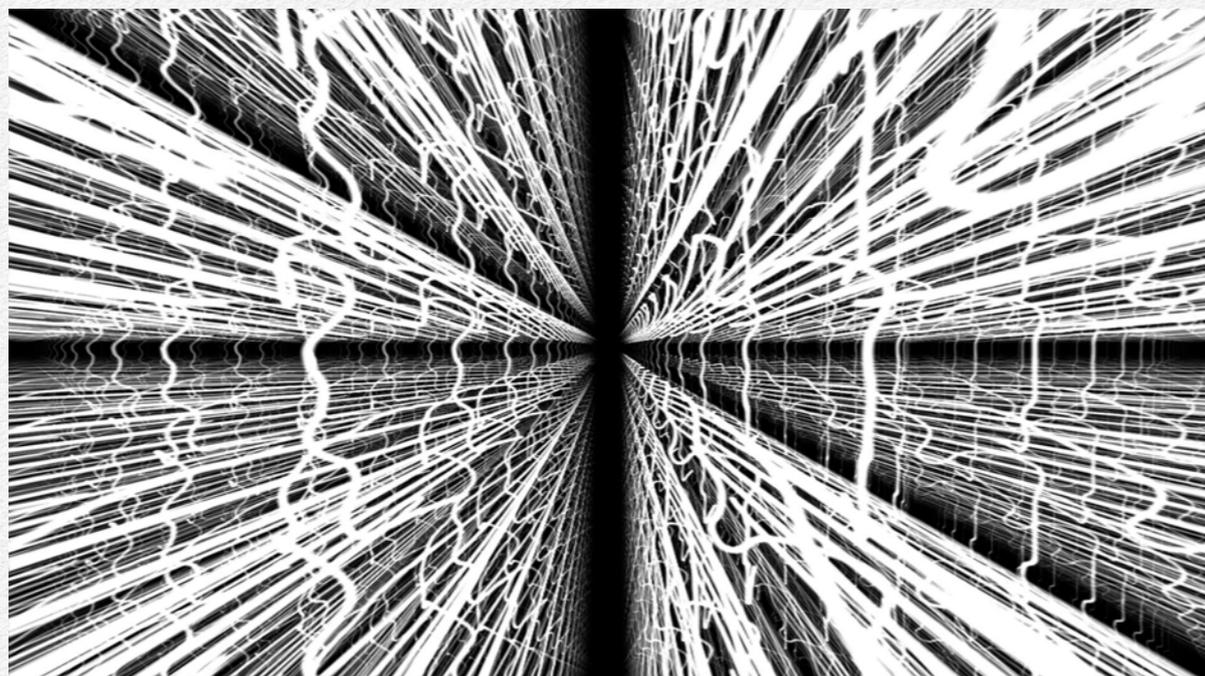
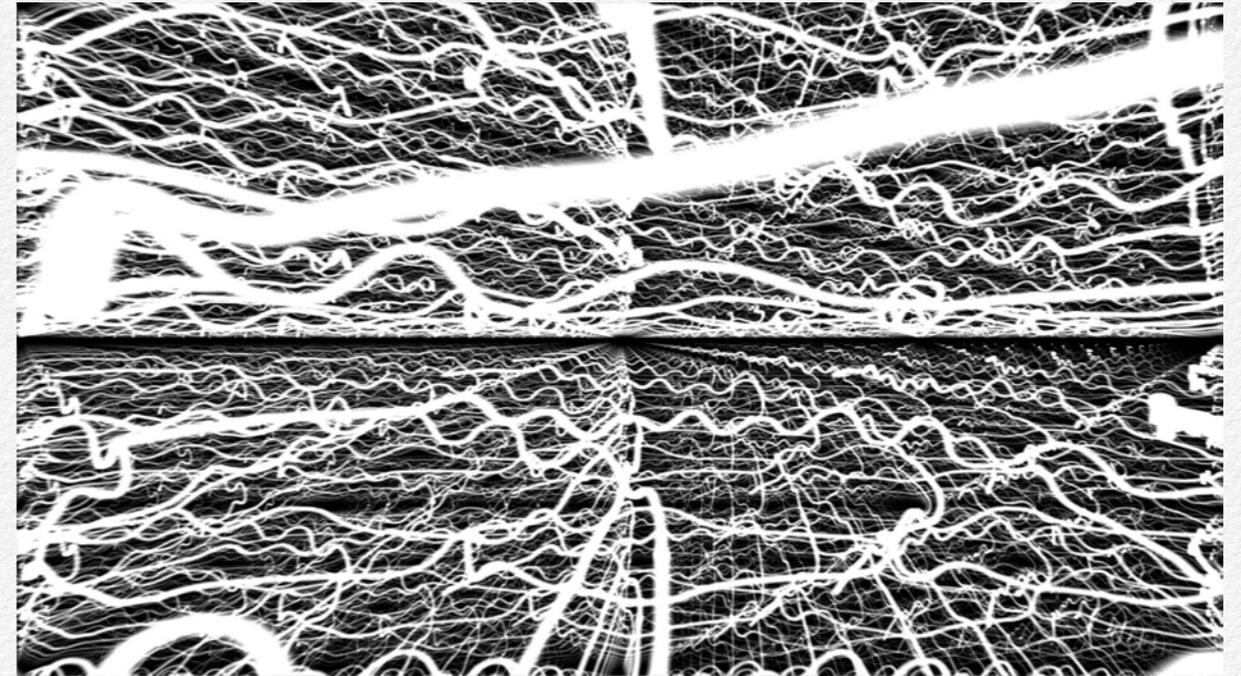
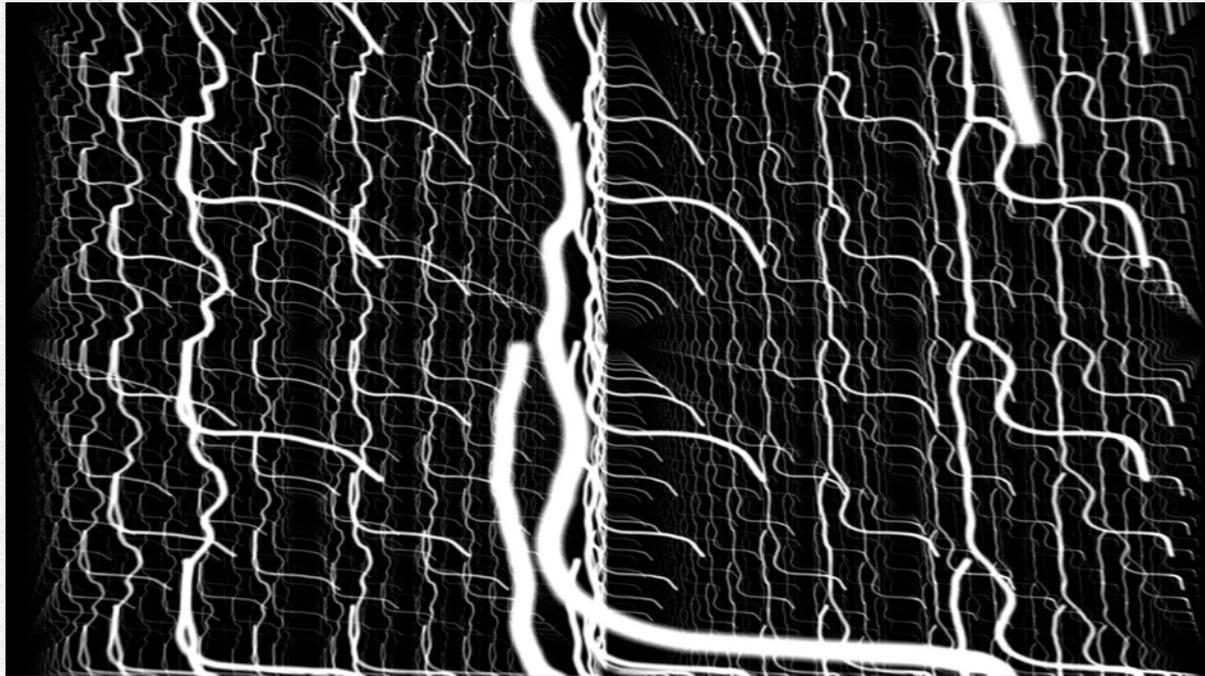
Imagens do movimento de uma partícula na variedade **esférica** criadas pelos visitantes da exposição através da instalação 3D.



---

## Galeria 3D - espaço euclidiano

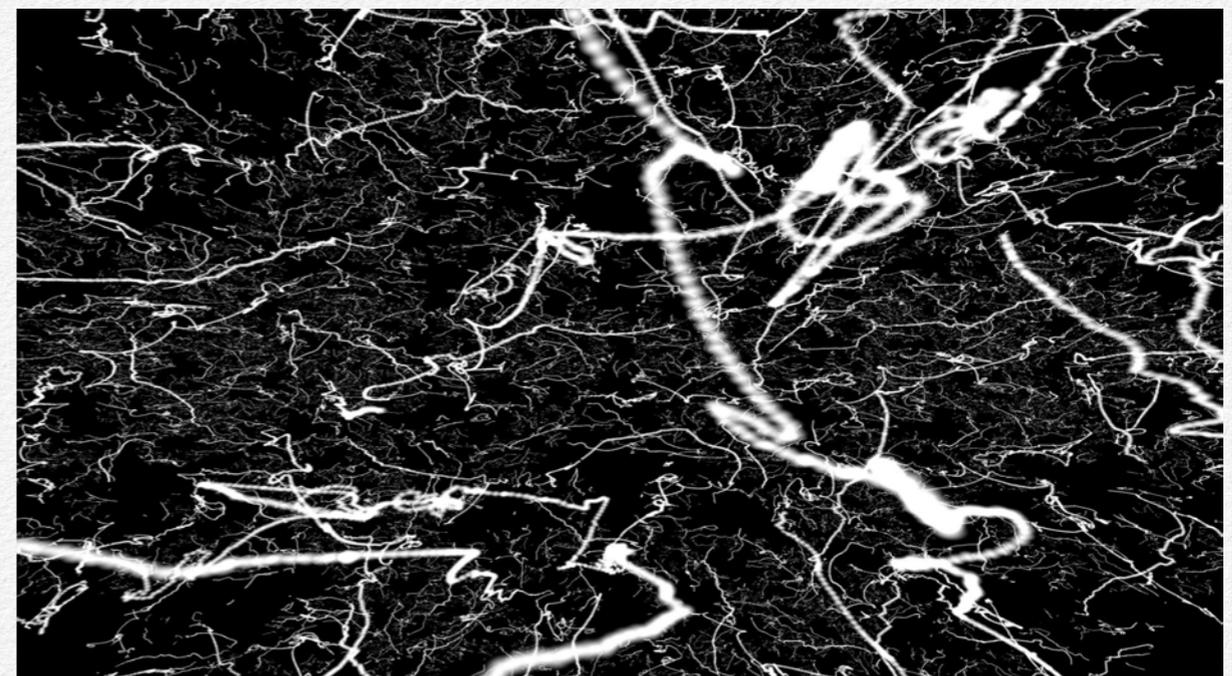
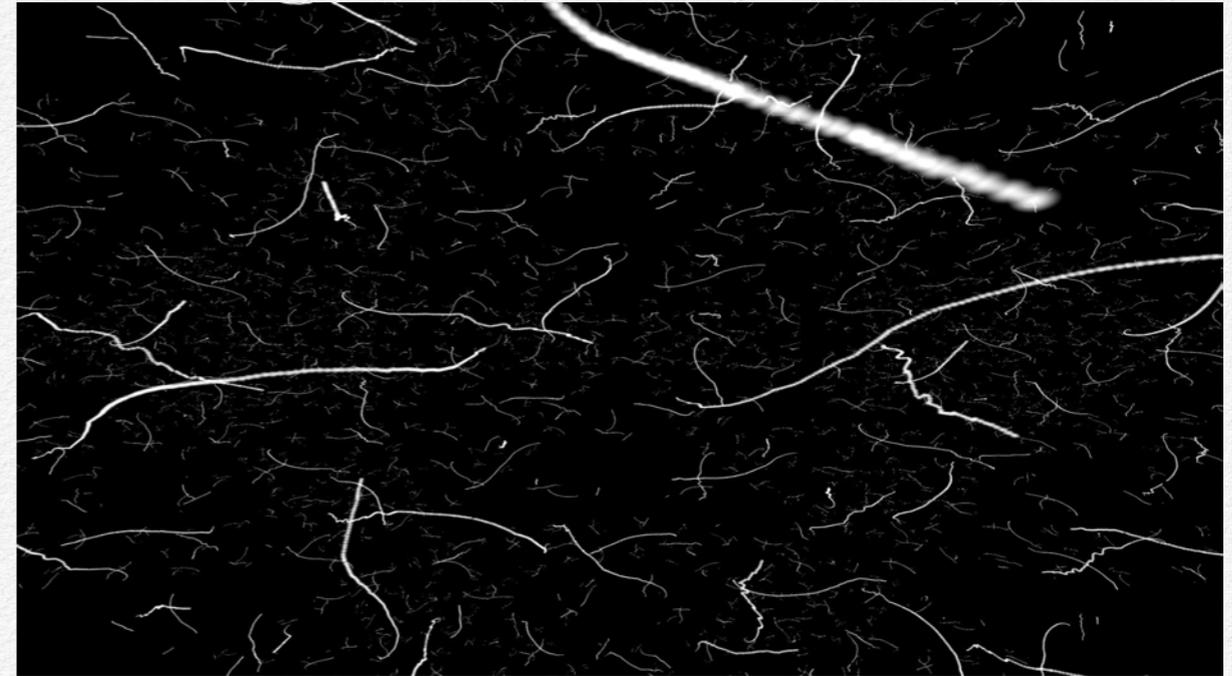
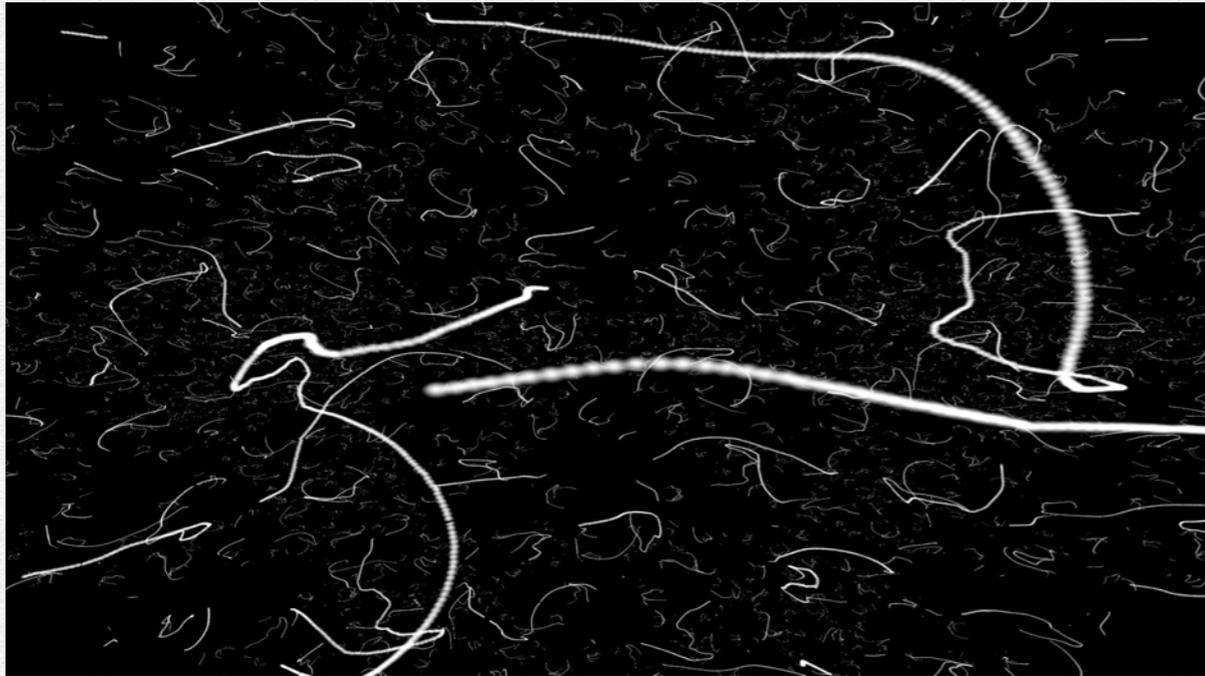
Imagens do movimento de uma partícula na variedade **plana** criadas pelos visitantes da exposição através da instalação 3D.



---

## Galeria 3D - espaço hiperbólico

Imagens do movimento de uma partícula na variedade **hiperbólica** criadas pelos visitantes da exposição através da instalação 3D.



# Teoremas e citações

Este capítulo apresenta alguns dos teoremas fundamentais relacionados com a geometria e a topologia das variedades de dimensão 2 e 3, dentre os quais a Conjectura de Poincaré (1904) e a Conjectura de Geometrização, de Thurston (1976).

# Teoremas de variedades 2D e 3D

A investigação de aspectos geométricos e topológicos dos espaços abstratos de dimensão  $N$  constitui um campo importante da Matemática. Grande parte dos problemas sobre as variedades bidimensionais foi resolvida durante o século 19. Dentre os resultados principais estão os teoremas de classificação das superfícies e da uniformização. Entretanto, somente no século 20 chegou-se a um entendimento mais completo das variedades 3D. A prova da Conjectura de Poincaré e do Teorema de Geometrização estão entre as contribuições essenciais para a solução desse desafio.

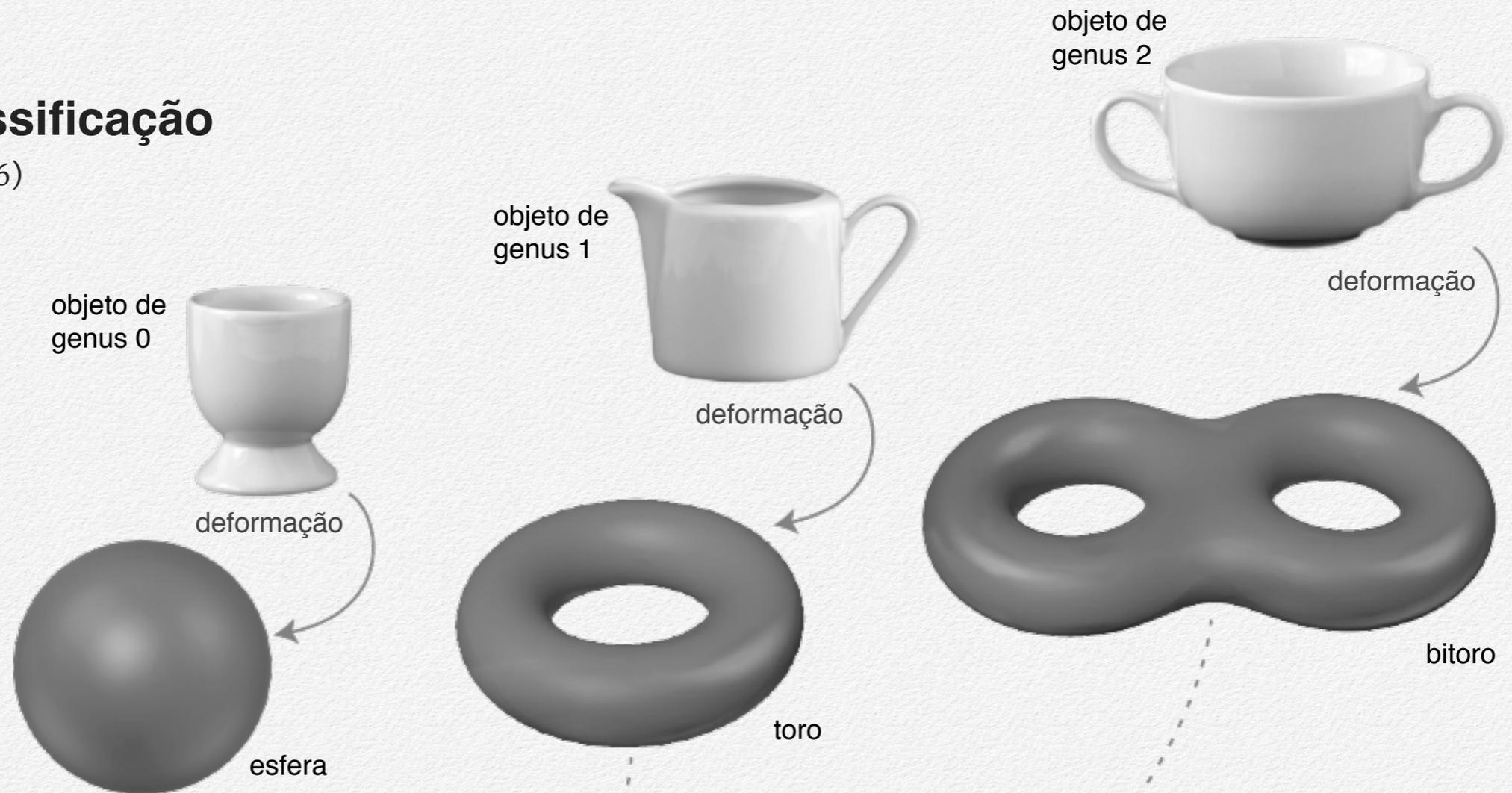


Figura 5.1 Vitrine com objetos do cotidiano e superfícies abstratas de genus 0, 1 e 2, parte da exposição no MAST.

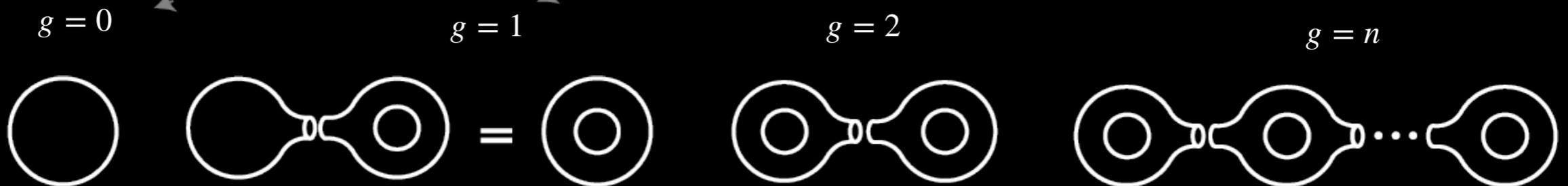
# Teorema de Classificação

(MOEBIUS, JORDAN, 1866)

Toda superfície fechada e orientável pode ser deformada para corresponder a uma soma conexa de  $g$  toros, para  $g \geq 0$



Classificação de superfícies



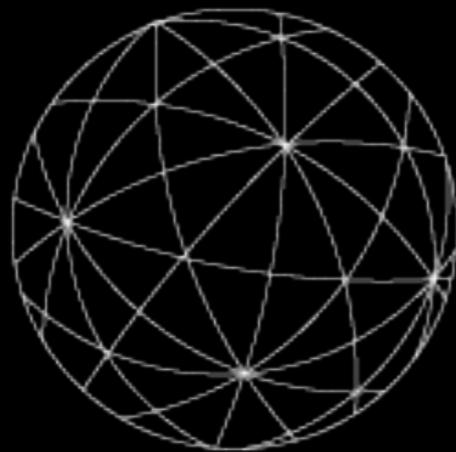
---

# Teorema de Uniformização

(POINCARÉ, KLEIN, 1907)

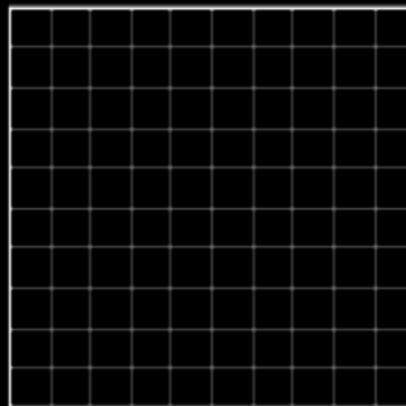
Toda superfície fechada e orientável  
admite uma das seguintes geometrias:  
esférica ( $S^2$ ), plana ( $E^2$ ) ou hiperbólica ( $H^2$ ).

$S^2$



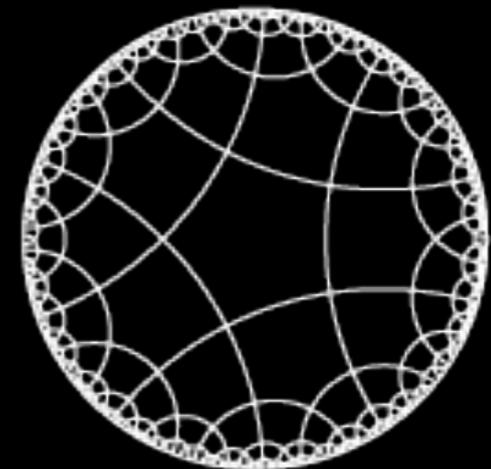
$g = 0$

$E^2$



$g = 1$

$H^2$



$g = 2, 3, \dots, n$

---

# Teorema de Geometrização

(THURSTON, PERELMAN, 2002)

Toda variedade tridimensional pode ser cortada ao longo de superfícies e decomposta em variedades de dimensão 3 passíveis de deformação em uma das oito geometrias fundamentais ao lado.

As oito geometrias fundamentais:

$$S^3$$

$$E^3$$

$$H^3$$

$$S^2 \times E^1$$

$$H^2 \times E^1$$

$$SL_2$$

$$Nil$$

$$Sol$$

## Corolário

(POINCARÉ, PERELMAN)

Toda variedade tridimensional, fechada e simplesmente conexa, pode ser deformada na esfera de dimensão 3.

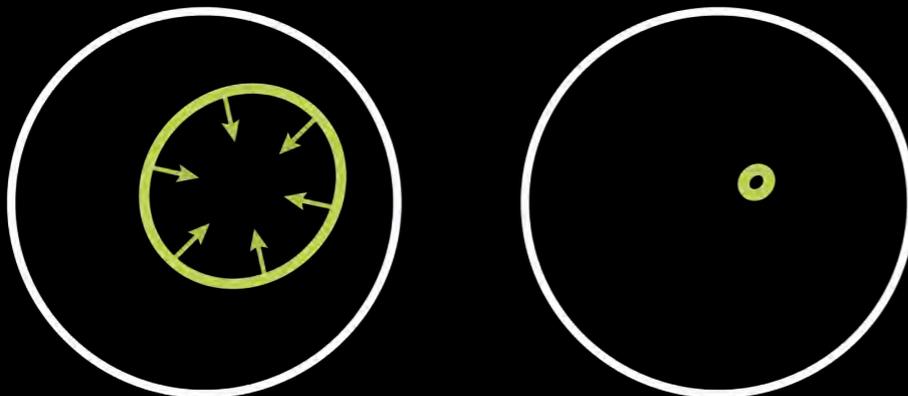
# Conjectura de Poincaré

(POINCARÉ, 1904)

Essa conjectura é sobre espaços simplesmente conexos, caracterizados pela propriedade que todos os caminhos fechados podem ser contraídos ao longo do espaço a um ponto.

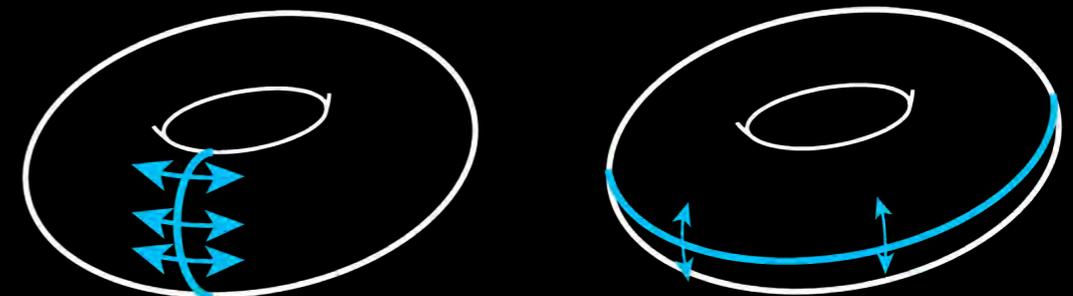
O Teorema de Geometrização, provado por Perelman, tem como consequência a solução da famosa Conjectura de Poincaré, um dos sete Problemas do Milênio em Matemática.

simplesmente conexa



Todo caminho fechado na 2-esfera pode ser contraído a um ponto

não simplesmente conexa



Caminhos no 2-toro que não podem ser contraídos a um ponto

---

# Citações e experiências

“Uma geometria não é mais verdadeira que outra, ela somente pode ser mais conveniente ...”

H. POINCARÉ, *La Science et L'Hypothèse*, 1902

“Qualquer problema de natureza não-linear, que envolva mais de um sistema de coordenadas ou mais de uma variável, ou cuja estrutura seja inicialmente definida em termos globais, provavelmente vai requerer para a sua solução considerações de topologia e teoria dos grupos.

Na resolução de tais problemas, a análise clássica aparece frequentemente como um instrumento local, integrado ao problema como um todo através da topologia ou teoria dos grupos.”

M. MORSE, *Calculus of variation in the Large*, 1934

## Deformação topológica

Transformação de um toro em uma caneca. Embora os dois objetos sejam diferentes geometricamente, eles são equivalentes do ponto de vista topológico.

1



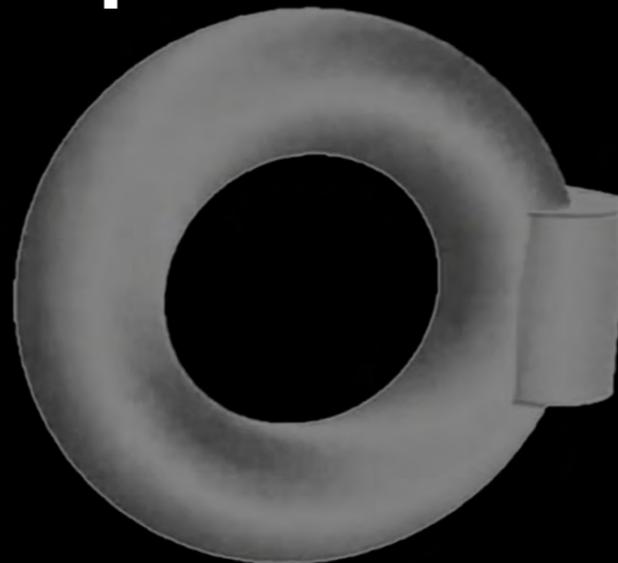
2



3



4



5

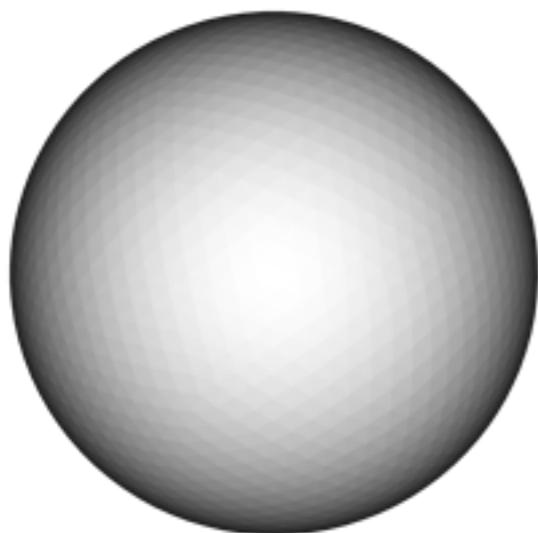


---

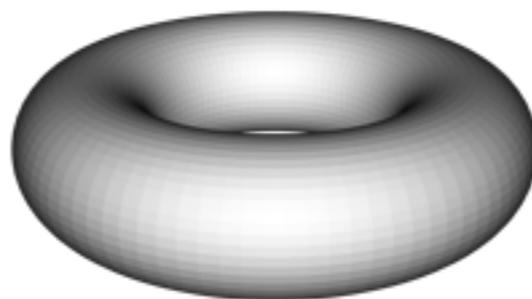
## Objetos 3D

Os objetos desta página correspondem, respectivamente, à esfera, ao toro e ao bitoro.

Esfera



Toro



Bitoro



# As oito geometrias de Thurston

Este capítulo aprofunda o Teorema de Geometrização, desenvolvido por William Paul Thurston, segundo o qual toda variedade de dimensão 3 admite uma decomposição envolvendo uma dentre oito geometrias.

# Teorema de Geometrização

O Teorema de Geometrização de Thurston-Perelman é o análogo, para variedades tridimensionais, ao Teorema de Uniformização, para superfícies bidimensionais. Pelo teorema de Uniformização, toda superfície simplesmente conexa admite uma das 3 geometrias (plana, esférica, hiperbólica). Mas, em dimensão três nem sempre é possível associar uma única geometria ao espaço topológico completo de uma variedade. Por outro lado, o Teorema da Geometrização afirma que toda variedade 3D fechada sempre pode ser decomposta de forma canônica em partes que possuem um dos oito tipos de estrutura geométrica. A Conjectura da Geometrização de Thurston foi provada por Perelman usando o Fluxo de Ricci com Cirurgias.



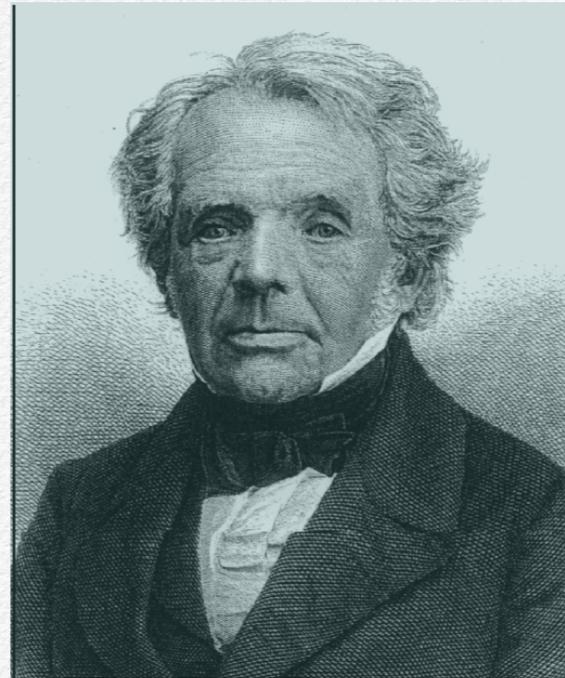
Figura 6.1 Perelman discute sua prova da Conjectura de Poincaré e a conclusão do Programa de Geometrização de Thurston em seminário na Universidade Princeton, em abril de 2003.

# Um pouco de história

Aqui, você poderá visualizar uma linha do tempo que conta mais sobre a história dos matemáticos, problemas e prêmios relacionados à Conjectura de Poincaré.

# Linha do tempo

Agora que já apresentamos e descrevemos conceitos e teoremas relacionados ao universo da Geometria e da Topologia, estamos prontos para explorar, com mais detalhes, a gênese da Conjectura de Poincaré e de seus principais pensadores. A linha do tempo foca em alguns dos maiores feitos e descobertas relacionados a esta questão que é apontada como um dos sete problemas matemáticos do milênio pela Clay Mathematics Institute. Da mesma forma, destacamos alguns fatos relativos às pesquisas dos matemáticos que ajudaram a formular e solucionar o problema.



**August Ferdinand Möbius**  
(17 de Novembro de 1790  
- 26 de Setembro de 1868)

Matemático e astrônomo alemão. Seu trabalho mais conhecido é a Faixa de Möbius, uma superfície não-orientável com bordo. O símbolo do IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Rio de Janeiro, Brasil), é inspirado no espaço topológico da Faixa de Möbius.

impa



### Christian Felix Klein

(25 de Abril de 1849 -  
22 de Junho de 1925)

Matemático alemão  
conhecido pelo seu  
trabalho em Teoria  
dos Grupos e Análise  
Complexa.



### Jules Henri Poincaré

(29 de Abril de 1854 - 17 de Julho de 1912)

Matemático francês, físico teórico, engenheiro e também filósofo.  
Dentre suas inúmeras contribuições para o conhecimento matemático,  
destaca-se a formulação da Conjetura de Poincaré, em 1904.

Em 1872, Klein  
elaborou o Programa  
Erlanger para  
classificar as  
geometrias pelos seus  
grupos de simetrias.

### FORMULAÇÃO DA CONJECTURA DE POINCARÉ



Morre  
A. F.  
Möbius

Morre  
J. H.  
Poincaré

1849

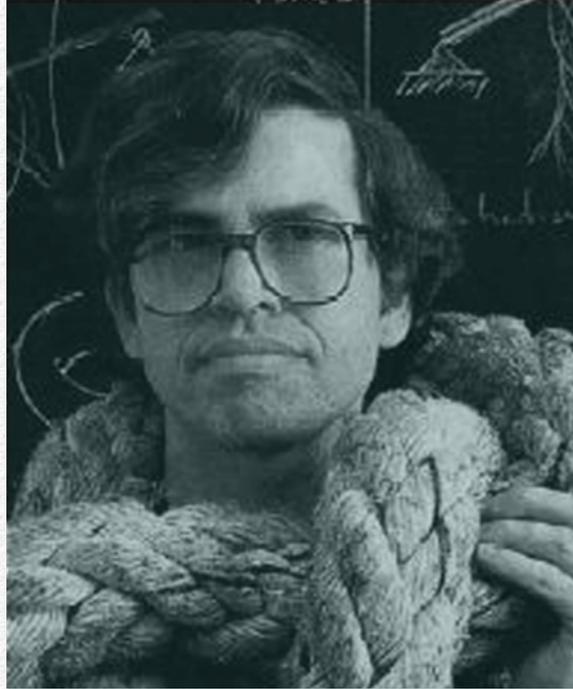
1854

1868

1872

1904

1912



### William Paul Thurston

(30 de Outubro de 1946 -  
21 de Agosto de 2012)

Matemático americano, pioneiro no campo da Topologia em baixas dimensões. Thurston formulou a Conjectura da Geometrização, segundo a qual toda 3-variedade admite uma decomposição envolvendo oito geometrias.



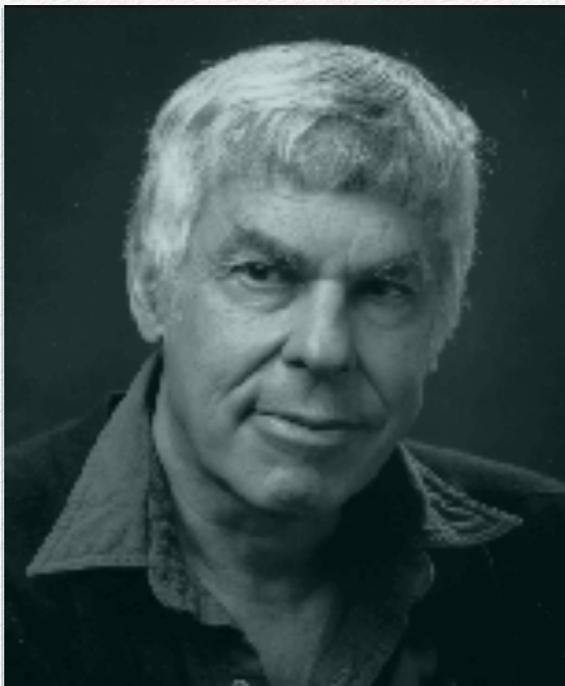
### Grigori Yakovlevich Perelman

(13 de Junho de 1966)

Matemático russo que proporcionou contribuições fundamentais para a Geometria Riemanniana e a Topologia Geométrica. Perelman provou, em 2002, o Teorema de Geometrização de Thurston. Consequentemente, com isso resolveu positivamente a Conjectura de Poincaré para variedades de dimensão 3.

### Stephen Smale

(15 de Julho de 1930)



### Michael Freedman

(21 de Abril de 1951)



Morre  
C. F.  
Klein

1925

1930

1946

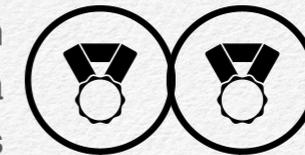
1951

S. Smale  
recebe a  
Medalha Fields



1966

W. P. Thurston  
recebe a  
Medalha Fields



1982

1986

M. Freedman  
recebe a  
Medalha Fields



## A Conjectura de Poincaré e a Medalha Fields

Até hoje, a União Matemática Internacional (IMU) já concedeu 44 Medalhas Fields. Três delas premiaram trabalhos diretamente ligados à Conjectura de Poincaré. Algumas outras foram conferidas a tópicos correlatos. Listamos cinco premiações que merecem destaque:

- **Stephen Smale, 1966**

Recebeu a Medalha Fields em 1966 após provar a Conjectura de Poincaré em dimensão maior ou igual a 5 em 1960.

- **William Thurston, 1982**

Recebeu a Medalha Fields, em 1982, ao formular a Conjectura da Geometrização e provar que ela é válida no caso das variedades de Haken (Teorema “Monstro”).

- **Shing-Tung Yau, 1982**

Recebeu a Medalha Fields, também em 1982, por resolver a Conjectura de Calabi e por outros trabalhos.

- **Michael Freedman, 1986**

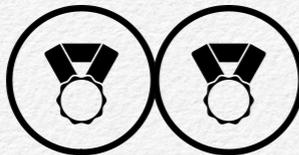
Recebeu a Medalha Fields, em 1986, por provar a Conjectura de Poincaré em dimensão 4, em 1982.

- **Grigori Perelman, 2006**

Foi-lhe concedida, em 2006, a Medalha Fields, após publicar artigos contendo a prova da Conjectura de Poincaré e da Conjectura da Geometrização, em 2002. No entanto, Perelman recusou.

Ademais, a Conjectura de Poincaré é apontada como um dos sete problemas do milênio, segundo o Clay Mathematics Institute. Para a resolução desses problemas, a instituição oferece o prêmio de um milhão de dólares.

G. Y. Perelman recebe a Medalha Fields, mas a recusa



G. Y. Perelman recebe o prêmio Clay do Milênio, mas o recusa

### RESOLUÇÃO DA CONJECTURA DE POINCARÉ



Morre W. P. Thurston

2002 2006 2010 2012

# Saiba mais

Aqui, está reunida uma seleção de livros, vídeos, palestras e eventos que ajudará você a conhecer ainda mais sobre esta fascinante área da Matemática.

# Livros



Clique nas URLs para comprar os livros.



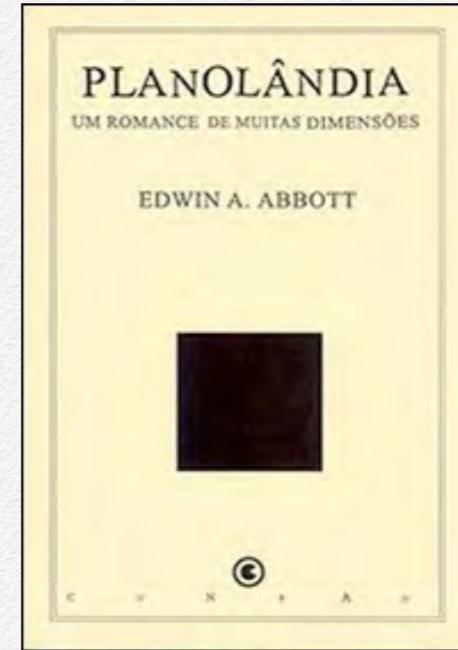
## A SOLUÇÃO DE POINCARÉ: EM BUSCA DA FORMA DO UNIVERSO

Donal O'Shea, 2007

Sinopse: “A solução de Poincaré” conta a história das fascinantes personalidades, instituições e erudição por trás de séculos de matemática que conduziram à dramática prova de Perelman, e que, no processo, ampliaram a nossa compreensão de como opera o universo. De forma clara e acessível, o autor oferece uma visão memorável da busca coletiva de conhecimento sobre o universo neste livro instigante.



<http://www.buscape.com.br/a-solucao-poincare-donal-o-shea-8501079243.html>



## PLANOLÂNDIA: UM ROMANCE DE MUITAS DIMENSÕES

Edwin A. Abbott, 1992

Sinopse: A história se passa em um universo bidimensional habitado por figuras geométricas. O narrador e protagonista é um quadrado, que apresenta ao leitor a organização social e política de seu país, onde o prestígio social relaciona-se ao número de lados e à regularidade destes. Assim, as camadas sociais variam de forma ascendente dos triângulos isósceles aos círculos, que constituem o topo da hierarquia.

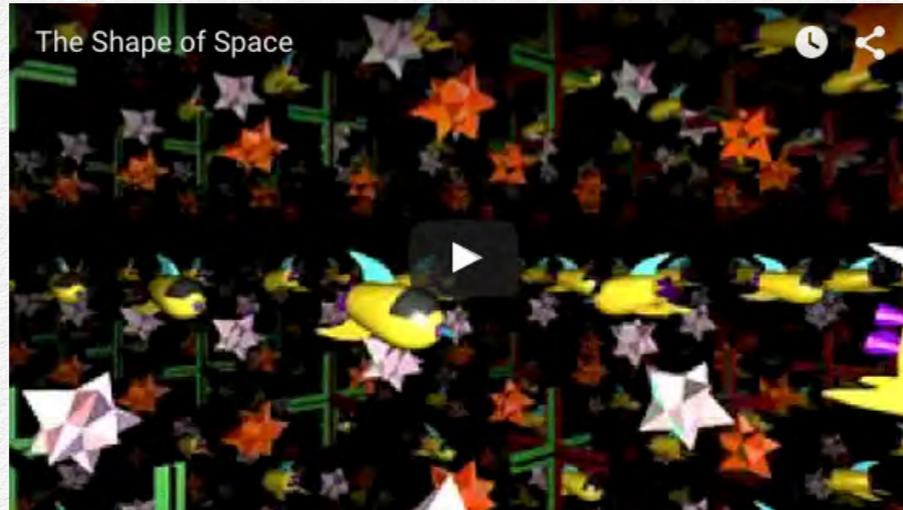


<http://www.saraiva.com.br/planolandia-um-romance-de-muitas-dimensoes-col-classicos-conrad-108589.html>

# Vídeos



Clique nos vídeos ou nas URLs para assisti-los.



## THE SHAPE OF SPACE (GEOMETRY CENTER)

Tamara Munzner e Delle Maxwell, 1995

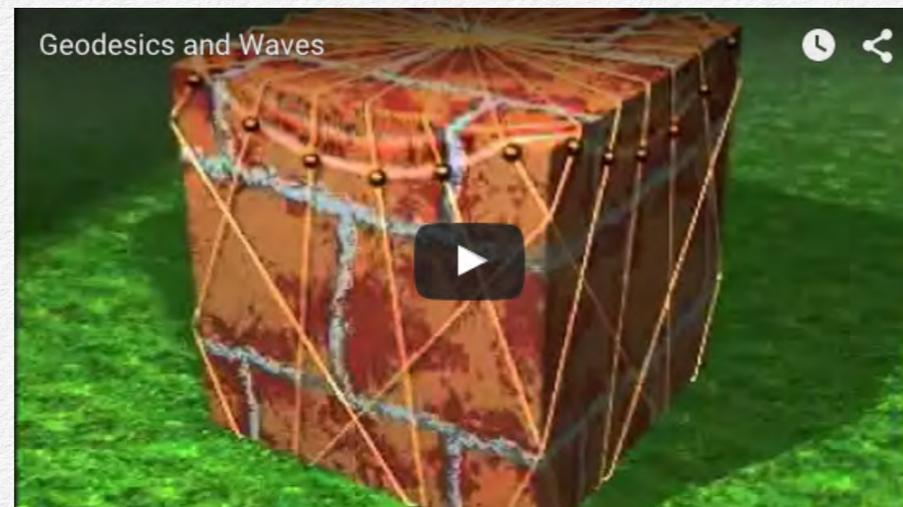
[https://youtu.be/-gLNIC\\_hQ3M](https://youtu.be/-gLNIC_hQ3M)



## DIMENSIONS

Jos Leys, Étienne Ghys, Aurélien Alvarez, 2010

<https://youtu.be/6cpTEPT5i0A?list=PL3C690048E1531DC7>



## GEODESICS AND WAVES

Konrad Polthier, Markus Schmies, Martin Steffens, Christian Teitzel, 1997

[https://youtu.be/bX\\_dsbiDfZw](https://youtu.be/bX_dsbiDfZw)

# Palestras



Clique nos vídeos ou nas URLs para assisti-los.



## THE GEOMETRY OF 3-MANIFOLDS

**Cutis T. McMullen**

Harvard Science Center Research Lecture Series, Outubro 2006

[https://youtu.be/ZY50V\\_d4wok](https://youtu.be/ZY50V_d4wok)



## MATH ENCOUNTERS: THE SHAPE OF SPACE

**Jeff Weeks**

National Museum of Mathematics, Fevereiro 2012

<https://youtu.be/5u7hFQy9Mt0>



## THE POINCARÉ CONJECTURE OR: HOW I LEARNED TO STOP WORRYING AND LOCK MY BIKE

**Kate Poirier**

Nerd Nite East Bay #8 - The New Parkway, Maio

<https://youtu.be/p4FtN3FN3XY>

# Palestras do IMPA



Clique nos vídeos ou nas URLs para assisti-los.



**“GEOMETRIA E IMAGINAÇÃO: UM PASSEIO”**

**Fernando Codá**

IMPA | Junho 2014 | Nível básico

<https://youtu.be/G0yoDJ8IRWI>



**“CONJECTURA DE POINCARÉ: GEOMETRIA PARA ENTENDER O UNIVERSO”**

**Marcelo Viana**

IFUSP | Novembro 2008 | Nível intermediário

<https://youtu.be/Kqih4TUMzAw>



**“THE POINCARÉ CONJECTURE”**

**Fernando Codá**

IMPA | Novembro 2012 | Nível avançado

<https://youtu.be/xyXWiS4HEbE>



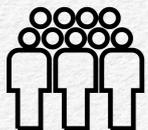
**“THE WILLMORE CONJECTURE AND MINIMAL SURFACES”**

**Fernando Codá**

60 Anos do IMPA | Outubro 2012 | Nível avançado

<https://youtu.be/onXUkmVKGM4>

# Eventos do IMPA



Clique nos vídeos para assisti-los e nas URLs para saber mais sobre os eventos.

COLÓQUIO INTERDISCIPLINAR  
HENRI POINCARÉ  
IMPA, 2012



Cerimônia de abertura

[http://www.impa.br/opencms/pt/eventos/store\\_old/evento\\_1206](http://www.impa.br/opencms/pt/eventos/store_old/evento_1206)

<http://video.impa.br/index.php?page=homenagem-poincare-2012>

TRIMESTER PROGRAM ON COMPUTATIONAL  
MANIFOLDS AND APPLICATIONS  
IMPA, 2012



Palestra 1 - “The classification theorem for compact surfaces”, **Jean Gallier**

<http://www.visgraf.impa.br/cma2011/>

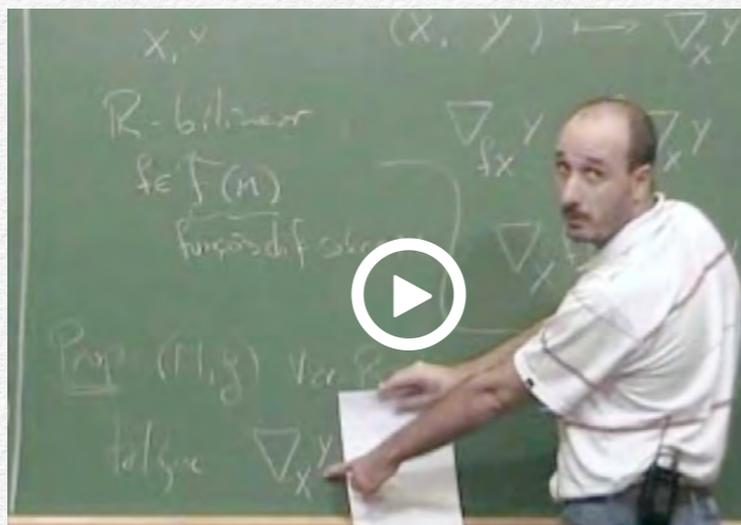
<http://www.visgraf.impa.br/cma2011/workshop/videos.html>

# Cursos no IMPA



Clique nos vídeos para assisti-los e nas URLs para saber mais sobre os cursos.

**FLUXO DE RICCI E  
CONJECTURA DE POINCARÉ**  
Escola de Altos Estudos, 2007



Aula 1, **Luiz A. Florit**

[http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/escola\\_altos\\_estudos/fluxo\\_ricci\\_conjectura\\_poincare.html](http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/escola_altos_estudos/fluxo_ricci_conjectura_poincare.html)

[http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/escola\\_altos\\_estudos/aulas\\_anteriores\\_video.html](http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/escola_altos_estudos/aulas_anteriores_video.html)

**THE UNIFORMIZATION THEOREM:  
OLD AND NEW**  
Escola de Altos Estudos, 2011



Aula 1, **Étienne Ghys**

[http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/escola\\_altos\\_estudos/2011/Etienne\\_Ghys/the\\_uniformization\\_theorem\\_old\\_new.html](http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/escola_altos_estudos/2011/Etienne_Ghys/the_uniformization_theorem_old_new.html)

<http://video.impa.br/index.php?page=escola-de-altos-estudos-the-uniformization-theorem-old-and-new>

# Ficha técnica

Por fim, este capítulo apresenta todas as pessoas e instituições envolvidas na realização da exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3” (França e Brasil) e na concepção e desenvolvimento deste catálogo.

## CONCEPÇÃO DA EXPOSIÇÃO

---

A exposição segue um programa de arte-ciência com perspectivas didáticas inicialmente proposto por Pierre Berger e Pierre-Yves Fave. A exposição foi lançada primeiro em Paris (Université Paris 13 e École Normale Supérieure). Pierre Berger e Pierre-Yves Fave são co-autores dos vídeos “Dimensão”, “Construindo Variedades”, “Variedade de Dimensão 2 e 3” e “Visão interior/exterior” e das instalações 2D e 3D, com base em programas desenvolvidos por equipes internacionais com formação multidisciplinar nos campos da Ciência, Arte e Tecnologia.



### **Pierre Berger**

Matemático e pesquisador do CNRS – Paris 13. Ele tem doutorado pelo Collège de France e formação pela École Normale Supérieure e École des Arts Décoratifs (Paris).

---

Autor e coordenador da exposição. Responsável pelo desenvolvimento de software e imagens.



### **Luiz Velho**

Pesquisador titular do IMPA e líder do VISGRAF. Doutor pela University of Toronto e mestre pelo MIT Media Lab. Um dos pioneiros da animação por computador no Brasil, trabalhou em fotografia, cinema e televisão.

---

Supervisor do projeto no Brasil. Responsável pelo desenvolvimento de software.



### **Mariana Duprat**

Designer formada pela ESDI. Trabalhou com design de interação no IMPA. Já realizou instalações e exposições interativas para diversos museus de ciências no Rio.

---

Responsável pelo design da exposição e pelas ilustrações da seção “Visualização exterior de superfícies”.



### **Pierre-Yves Fave**

Artista plástico, formado na École des Beaux Arts (Paris), e especialista em instalações multimídia. Ele participou de diversas exposições na França, inclusive no Le Centre Georges Pompidou.

---

Co-autor e cenógrafo. Responsável pela produção de vídeos e instalações interativas.



### **Alex Laier Bordignon**

Professor assistente no Dep. de Matemática da UFF e doutor em Matemática pela PUC-Rio. Ele tem experiência na área de sistemas interativos.

---

Responsável pela programação dos sistemas de simulação visual das instalações.



### **Juliano Kestenberg**

Designer com graduação e mestrado pela ESDI. Trabalha como assistente de pesquisa no IMPA.

---

Responsável pelo Design da exposição e pela edição de vídeos.



### **Sergio Krakowski C. Rego**

Músico profissional, formado em Matemática pura e aplicada com doutorado pelo IMPA. Tem se destacado internacionalmente por sua atuação na área de música experimental.

---

Responsável pela programação da simulação sonora da instalação.



### **Djalma Lucio**

Formado em Ciência da Computação, trabalha no IMPA em desenvolvimento de sistemas gráficos.

---

Responsável pela programação e pelo suporte de sistemas.

## REALIZAÇÃO DA EXPOSIÇÃO NO BRASIL E NA FRANÇA



### EXPOSIÇÃO NO MAST

#### PROJETO

**Antonio Carlos Martins**

Coordenação de montagem  
e projeto de adaptação

**Ivo Antonio Almico**

Projeto de adaptação

#### EQUIPE DE PRODUÇÃO

**Dennis Regin da Silva Luiz**

**Douglas José de Almeida**

**Luis Ramiro**

**Rodrigo de Oliveira Barreto**

**Wilson Nascimento**

**Wilson Pontes Cruz**

LOGÍSTICA E ADMINISTRAÇÃO  
NO LABORATÓRIO VISGRAF

**Adriana Marangoni**

**Monica Borges**



### EXPOSIÇÃO NA FRANÇA

RELAÇÕES ACADÊMICAS  
E COMUNICAÇÃO

**Gwenola Madec**

**Johanne Ferry-Dely**

Université Paris 13

**Gaël Octavia**

Fondation Sciences

Mathématiques

de Paris

LOGÍSTICA E ADMINISTRAÇÃO NO  
LAGA

**Gilles Desert**

**Jean-Philippe Domergue**

**Yolande Jimenez**

**Laurence Halpern**

## INSTITUIÇÕES E APOIO

---

### PARCEIROS INSTITUCIONAIS

**CNRS-LAGA-Université Paris 13**  
Laboratoire Analyse Géométrie et  
Application

**Laboratório VISGRAF do IMPA**  
Unité mixte internationale du cnrs

**Universidade Federal Fluminense**  
Rio de Janeiro

### AGRADECIMENTOS

**Etienne Ghys**

**Jean-Luc Mincheni**

**Benoît Rittaud**

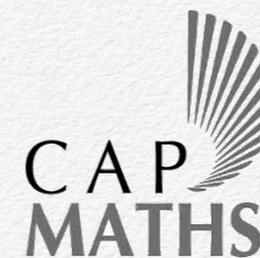
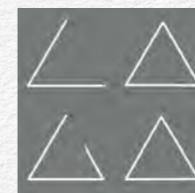
**Jacob Palis Jr**

**Jorge Lopes**

**Cassia Pessanha**

**Consuelo Camara**

### FINANCIAMENTO



Esta publicação é a versão em pdf do catálogo interativo da exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3”, idealizada por Pierre Berger e Pierre-Yves Fave, e em cartaz no MAST – Museu de Astronomia e Ciências Afins (Rio de Janeiro). Para informações sobre a versão interativa acesse <http://olhar3d.impa.br/catalogo/>

### CRÉDITOS

#### **Luiz Velho**

---

Responsável pelo projeto editorial e texto.

#### **Júlia Rabetti Giannella**

---

Responsável pelo projeto gráfico, desenvolvimento do iBook (recursos interativos e diagramação) e texto.



**Júlia Rabetti Giannella**  
Designer formada pela UFRJ e mestre em Ciências da Comunicação pela USP.

É doutoranda em Design pela ESDI-UERJ e trabalha como assistente de pesquisa no VISGRAF-IMPA.

### CRÉDITOS ADICIONAIS\*

- O catálogo foi criado utilizando o software iBooks Author, da Apple.
- O Passeio Virtual da exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3” foi desenvolvido através do software Panotour Pro, da Kolor.
- As fotos da exposição “Um Olhar nos Espaços de Dimensão 3” foram feitas pela equipe do MAST (Museu de Astronomia e Ciências afins, Rio de Janeiro).
- As ilustrações da seção “Variedades de duas dimensões” foram feitas por Mariana Duprat.
- Os vídeos das seções “Geometria e Topologia” e “Variedades de três dimensões” foram produzidos por Pierre Berger e Pierre-Yves Fave.
- O vídeo 5.1 foi gerado no software Mathematica.
- Os sons da seção “Variedades de três dimensões” gerados por Sergio Krakowski com ajuda de Pierre Berger, são resultado de simulações realizadas nas instalações da exposição na França.
- Os objetos 3D da seção “Teoremas e citações” foram modelados através dos softwares MatLab e MeshLab.
- As imagens das “Galeria 2D” (3.1) e “Galeria 3D” (4.1) foram criadas por visitantes da exposição utilizando, respectivamente, as instalações interativas 2D e 3D
- Os vídeos e imagens das instalações interativas 2D e 3D, dos capítulos 3 e 4, foram produzidos a partir das instalações de P. Berger and P.-Y. Fave usando o algoritmo descrito no artigo: “*An image-space algorithm for immersive views in 3-manifolds and orbifolds*”, Pierre Berger, Alex Laier, and Luiz Velho. *Visual Computer*, v. 31, p. 1-12, 2014.

\* Alguns créditos são referentes à versão interativa do catálogo.

© 2015 Luiz Velho, Julia Rabetti Giannella, Rio de Janeiro, RJ

Um olhar nos espaços de dimensão 3: o catálogo da exposição  
de P. Berger e P.-Y. Fave, ISBN 978-85-244-0418-4